

令和1年度後期 数値計算 期末テスト

問題1 浮動小数点型の数値表現における有効桁数を考慮して、次の10進数の計算を行うことを考える。

$$(a) 1234 + 1.456 - 1233 \quad (b) 5005 \times 3 \div 5 \quad (c) 103 \times 103 - 102 \times 102$$

それぞれの計算について以下の問に答えよ。なお、有効桁数10進4桁での10進数の表現では、12345は12340となり、1234.5は1234となり、12.345は12.34となり、0.012345は0.01234となる。

(1) それぞれの計算の正確な答を書け。

(2) それぞれの計算を有効桁数10進4桁で行った場合の答を書け。ただし、計算の規則として、加減算より乗除算を優先し、また、加減算どうしと乗除算どうしは左から右に向かって書かれている順番に行うこととする。

(3) (1)の答に対する(2)の答が持つ絶対誤差の大きさ、ならびに、相対誤差の大きさを書け。なお、相対誤差の大きさは分数の形で書いてもよい。

(4) (2)の計算の規則に従って計算しても正確な答を得るためには有効桁数が10進で何桁あれば十分か、その最低桁数を書け。

(5) (2)の計算の規則に従わなくてもよい場合、どのような工夫をすれば有効桁数10進4桁でも正確な答が得られるか、その工夫を書け。

問題2 以下のN個の1次方程式からなる**N元連立1次方程式**を考える。

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + \dots + a_{ij} x_j + \dots + a_{iN} x_N = b_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

これを解く代表的な数値解法にガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法がある。これらは、それぞれ、次の(A)と(B)の2段階の処理により、N個の未知数 x_i の解を求める。

ガウス・ジョルダンの方法 (A) 左辺の対角成分 $a_{ii} x_i$ のみを残す (B) $a_{ii} x_i = b_i$ から解 x_i を求める

ガウスの消去法 (A) 前進消去 (B) 後退代入

これらの数値解法について、以下の各問に答えよ。

(1) 次のプログラムは、ガウス・ジョルダンの方法、あるいは、ガウスの消去法で、上記の(A)の処理を行う部分である。ただし、このプログラムでは、上記のN元連立1次方程式の係数 a_{ij} ($i = 1, \dots, N$ ならびに $j = 1, \dots, N$) を配列要素 $a[i-1][j-1]$ に、 b_i を $a[i-1][N]$ に格納し、解 x_i を $a[i-1][N]$ に重ね書きする。空欄(a)～(f)を埋めてプログラムを完成させよ。ただし、(a)～(d)についてはガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法のそれぞれについて別々に答え、(e)についてはガウス・ジョルダンの方法についてのみ答え、(f)については2つの方法で共通の内容を答えよ。

```

#define N 3
float a[N][N+1];
void main( void )
{
    int    i, j, k;
    float p;

    ... 【中略】 ...

1:
2:   for( k = (a); k < (b); k++ ) {
3:       for( i = (c); i < (d); i++ ) {
4:           (e) {
5:               p = a[i][k] / a[k][k];    a[i][k] = 0;
6:               for( j = k+1; j < N+1; j++ ) { a[i][j] = (f); }
7:           }
8:       }
9:   }
10:
    ... 【中略】 ...
}

```

(2) 次の関数 func は、(1) のプログラムで生じる問題を解決するためのものである。どのような問題か説明せよ。また、この関数 func を(1) のプログラム中のどこで呼び出せばよいか、「○行目と□行目の間」のように、行番号を用いて答えよ。さらに、関数 func 中の空欄(g), (h)を埋めて完成させよ。

```

void func( int k )
{
    int    i, j, kmax;
    float  aa, amax;

    amax = (float)fabs( (double)a[k][k] );
    kmax = k;
    for( i = k+1; i < N; i++ ) {
        aa = (float)fabs( (double)(g) );
        if( aa > amax ) {
            amax = aa;    kmax = i;
        }
    }
    for( j = 0; j <= N; j++ ) {
        aa = a[k][j];    (h);    a[kmax][j] = aa;
    }
}

```

(3) 次のプログラムは、ガウス・ジョルダンの方法で、上記の(B)の処理を行う部分である。空欄(i)～(k)を埋めてプログラムを完成させよ。

```

for( i = (i); i < (j); i++ ) { a[i][N] = (k); }

```

(4) 次のプログラムは、ガウスの消去法で、上記の(B)の処理を行う部分である。空欄(l)～(q)を埋めてプログラムを完成させよ。

```

a[N-1][N] = a[N-1][N] / a[N-1][N-1];
for( i = (l); i >= (m); i-- ) {
    for( j = (n); j < (o); j++ ) { a[i][N] = (p); }
    a[i][N] = (q);
}

```

問題3 非線形方程式の数値解法について、以下の各問に答えよ。

(1) **2分法**で方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考える。ただし、関数 $f(x)$ は、任意の a, b ($a < b$) に対して $f(a) < f(b)$ を満たすものとする。

(1-1) ある反復時点で真の解を含む x 軸上の区間 $[a, b]$ が得られているものとする。その区間の midpoint c に対して $f(c) > 0$ の場合、2分法により区間 $[a, b]$ から幅を半分にした真の解を含む区間を書け。

(1-2) 2分法では、はじめに反復0回目として与えた真の解を含む区間 $[a_0, b_0]$ とその midpoint c_0 から開始し、(1-1)の方法で区間の幅を半分にする処理を反復する。そして、あらかじめ定めた正数 ε に対して反復停止規準 $|f(c)| < \varepsilon$ を満たした時点で反復を終了し、そのときの midpoint c の値を最終的な近似解とする。ここで、2分法により、次の条件で方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考える。

$$f(x) = 2x - 11, \quad [a_0, b_0] = [0, 32], \quad \varepsilon = 2$$

このとき、反復の開始から終了までの各反復回 (0, 1, 2, ...) で midpoint c と $f(c)$ がとる値を書け。ただし、解答の表中の全ての箇所を埋める必要はなく、反復を終了する反復回までの値を書け。

(2) **ニュートン法**は、方程式 $f(x) = 0$ の解を求める際、真の解 α に十分に近い初期値 x_0 から開始し、反復式を繰り返し計算することで近似解 $x_0, x_1, x_2, \dots$ を更新していく解法である。

(2-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を用いて、 $y = f(x)$ 上の点 $(x_i, f(x_i))$ における接線の方程式を書け。

(2-2) 近似解 x_i から x_{i+1} を求めるニュートン法の反復式を書け。

(3) 上記の (2) に関連して、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が容易に求められない場合、ニュートン法の反復式を変形した **割線法** と呼ばれる方法が用いられる。

(3-1) 割線法で用いられる $x = x_i$ における導関数 $f'(x_i)$ を近似する式を書け。

(3-2) 近似解 x_{i+1} を求める割線法の反復式を書け。

問題4 数値積分法では、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ に対する積分値

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を近似的に求める．

- (1) **台形公式**で式①を近似する方法について、解答用紙中の図を用いて説明し、その公式を書け．
- (2) **シンプソン公式**で式①を近似する方法について、解答用紙中の図を用いて説明し、その公式を書け．
- (3) 次の記述中の空欄を適切な式、数値等で埋めよ．

台形公式の精度を高めるための複合台形公式では、積分区間 $[a, b]$ を細分し、その細分された各区間に台形公式を適用し、それらの和で積分値を近似する．区間 $[a, b]$ を n 等分したとすると、一つの分割区間の幅 h は n , a , b を用いて以下のように表される．

$$h = \boxed{\text{(b)}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

この h を用いて、複合台形公式による積分の近似値 q は、以下のように求められる．

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h \{ f(a+ih) + f(a+(i+1)h) \} \\ &= \boxed{\text{(c)}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(d)}} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\text{(e)}}) + f(b) \right\} \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

複合台形公式の積分区間の分割数 n を2倍ずつ増やしながら反復的に積分近似値の精度を高めていき、十分に要求精度を満たした段階で反復を停止する方法を自動積分法という．つまり、分割数が n のときの近似値を $q(n)$ とすると、 $n=1$ から開始して $q(1) \rightarrow q(2) \rightarrow q(4) \rightarrow q(8) \rightarrow \dots \rightarrow q(n) \rightarrow q(2n) \rightarrow \dots$ と精度を上げていく．このとき、 $q(2n)$ を求めるのに必要な関数 f の値のうちの約半数は $q(n)$ を求める際にすでに計算されているため、改めて再計算するのは無駄である．そこで、直前に求めた $q(n)$ の値を利用し、新たに必要となる関数値のみを計算するだけで $q(2n)$ の値を得るようにすることで、効率を上げる方法が考えられる．式②の h を h_n とすると、分割数が $2n$ のときの一つの分割区間の幅 h_{2n} は、 n , a , b を用いて以下のように表される．

$$h_{2n} = \boxed{\text{(f)}}$$

以下に示すように、はじめに式③により h_{2n} を用いて $q(2n)$ を表し、その式を変形していくことで、 $q(n)$ と新たに必要となる関数値のみから $q(2n)$ を表すことができる．

$$\begin{aligned} q(2n) &= \boxed{\text{(g)}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^{2n-1} f(a + \boxed{\text{(i)}}) + f(b) \right\} \quad \leftarrow \text{式③より} \\ &= \boxed{\text{(g)}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\text{(j)}}) + f(b) \right\} + \boxed{\text{(g)}} \left\{ \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{\text{(k)}}) \right\} \\ &= \boxed{\text{(l)}} + \boxed{\text{(m)}} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{\text{(k)}}) \quad \leftarrow q(n) \text{を含む式} \end{aligned}$$

(4) 次の記述中の空欄を適切な式, 数値等で埋めよ.

シンプソン公式についても, 台形公式と同様, (3) の式②で表される区間 $[a, b]$ の n 等分 (n は偶数) による分割区間幅 h を用いて, 複合公式は以下になる. ただし, 偶数 n を $n = 2m$ と表す.

$$q = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{3} h \{ f(a+2ih) + 4f(a + \boxed{(c)}) + f(a + \boxed{(d)}) \}$$

$$= \frac{1}{3} h \left\{ \underbrace{f(a) + f(b)}_{(あ)} + 2 \sum_{i=0}^{m-2} \underbrace{f(a + \boxed{(e)})}_{(い)} + 4 \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{f(a + \boxed{(f)})}_{(う)} \right\} \dots\dots ⑤$$

ここで, 分割数が n のときの積分近似値を $q(n)$ とし, 分割区間幅 h を h_n と表すと, 式⑤の (あ), (い), (う) を $O(n)$, $T(n)$, $F(n)$ と表すことで次式を得る.

$$q(n) = \boxed{(g)} \{ O(n) + 2T(n) + 4F(n) \}$$

台形公式と同様, シンプソン公式でも分割数 n を 2 倍ずつ増やしながら積分近似値の精度を高めていく自動積分法が考えられる. シンプソン公式では, 自動積分の各反復において, 分割数 n の近似値 $q(n)$ を構成する $O(n)$, $T(n)$, $F(n)$ を利用して, 関数 f の無駄な計算を行なうことなく分割数 $2n$ の $O(2n)$, $T(2n)$, $F(2n)$ を以下のように得ることで, 近似値 $q(2n)$ を効率的に求める. なお, 分割数 $2n$ の分割区間幅を h_{2n} とする.

$$q(2n) = \boxed{(h)} \{ O(2n) + 2T(2n) + 4F(2n) \}$$

$$O(2n) = \boxed{(i)} \quad T(2n) = \boxed{(j)} \quad F(2n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \boxed{(k)})$$

問題5 微分方程式の初期値問題では, 微分方程式

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \quad \dots\dots\dots ①$$

について, 初期条件 $y(a) = y_a$ を満たす解 $y(x)$ を求める. この方程式を数値的に解く差分法では, x 軸上の区間 $[a, b]$ を n 等分する. すると, 各分割点 x_i は分割区間幅 (刻み幅) h を用いて以下のように表される.

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$h = (b - a) / n$$

このとき, x_i に対する $y(x_i)$ の値は, 式①の f を積分することで, 以下のように表される.

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \quad \dots\dots\dots ②$$

これが方程式①に対する差分方程式であり, 初期値 $y(x_0) = y_a$ から開始し, 式②を $i = 1, 2, \dots, n$ と逐次的に適用していくことで, 解 $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ を得ることができる.

(1) 式②の積分部分を近似的に求める代表的な解法の一つが**オイラー法**である. 真の値 $y(x_i)$ を近似した値を y_i と書くとする. このとき, オイラー法で y_{i-1} から y_i を求める公式を示し, この公式の意味を図を用いて説明せよ.

(2) オイラー法を改良した**改良オイラー法**による 1 ステップは次式であらわされる.

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} \{ f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})) \}$$

この式がどのような考え方でオイラー法を改良したものなのか, 上記の (1) で答えたオイラー法の公式との関係から述べよ.

問題6 相異なる $n+1$ 個のデータ点 $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ を通過する関数 $f(x)$ をできるだけ時間計算量の少ない関数 $P(x)$ で近似する**関数近似**について、以下の各問に答えよ.

(1) 以下の空欄を埋めよ.

関数 $f(x)$ を関数 $P(x)$ で**補間**する場合、関数 $P(x)$ は次の補間の条件を満たす必要がある.

$$\boxed{\text{(a)}}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \dots\dots \text{①}$$

ラグランジュ補間は、この関数 $P(x)$ として、以下の n 次多項式 $P_n(x)$ を用いる.

$$P_n(x) = \boxed{\text{(b)}}$$

$$\phi_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \dots\dots \text{②}$$

式②の関数は $x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$, のとき以下の値を取るため、多項式 $P_n(x)$ は式①の条件を満たす.

$$\phi_j(x_i) = \begin{cases} \boxed{\text{(c)}} & (i = j \text{ のとき}) \\ \boxed{\text{(d)}} & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) 関数 $P(x)$ として $P(x) = ax + b$ を用いる**最小2乗法**について、以下の問いに答えよ.

(2-1) データ値 f_i と関数値 $P(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, に関する残差の2乗和 E を書け.

(2-2) 上記の E を最小化するように関数 $P(x)$ の係数 a と b を決定する方法について書け.

令和1年度後期 数値計算 期末テスト 解答用紙

平成 年度入学 学籍番号 氏名

問題1 ★解答場所を間違えないこと！

	(1)	(2)	(4)
(a)			
(b)			
(c)			

(3)

	(a)	(b)	(c)
絶対誤差 の大きさ			
相対誤差 の大きさ			

(5) (a)

(b)

(c)

問題2 (1) ガウス・ジョルダンの方法

(a) (b)

(c) (d)

(e)

ガウスの消去法

(a) (b)

(c) (d)

ガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法で共通

(f)

問題2 (2)

呼び出す場所： 行目と 行目の間

(g)

(h)

(3) (i) (j)

(k)

(4) (l) (m)

(n) (o)

(p)

(q)

問題3 (1) (1-1)

(1-2)

反復回	0	1	2	3	4
c					
f(c)					

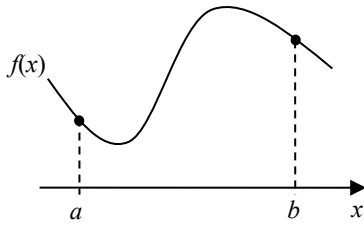
(2) (2-1)

(2-2)

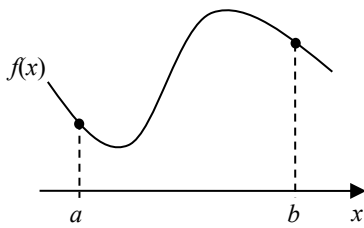
(3) (3-1)

(3-2)

問題4 (1)



(2)



(3) ★都合により (a) はありません。

(b) _____ (c) _____

(d) _____ (e) _____

(f) _____ (g) _____

(h) _____ (i) _____

(j) _____ (k) _____

(l) _____ (m) _____

(4) ★都合により (a), (b) はありません。

(c) _____ (d) _____

(e) _____ (f) _____

(g) _____ (h) _____

(i) _____ (j) _____

(k) _____

問題5 (1)

(2)

問題6 (1)

(a) _____

(b) _____

(c) _____ (d) _____

(2) (2-1)

(2-2)