

平成30年度後期 数値計算 期末テスト

問題1 数値の表現について、以下の各問に答えよ。

(1) 整数型の数値表現について、右表の[0]～[6]は同じ数を2進数(16ビット)と10進数で表現したものを表す。空欄を埋めよ。ただし、(a)、(b)は次の場合である。

(a) 0と正数のみを表現する場合(負数は表現しない)

(b) 0, 正数, 負数を表現する場合(負数は2の補数を用いて表現する)

	2進数	10進数	
		(a)	(b)
[0]	0000 0000 0000 0001	1	1
[1]	0000 0000 0000 1010	[1a]	[1b]
[2]	1111 1111 1111 1111	[2a]	[2b]
[3]	1111 1111 1111 1001	[3a]	[3b]
[4]	[4]		19
[5]	[5]	$2^{16}-3$	
[6]	[6]		-17

(2) 浮動小数点型の数値表現について、下図のように16ビットを用いて、第15ビットに符号s、第14～8ビットの7ビットに指数E、第7～0ビットの8ビットに仮数fを割り当て、実数xを次のように表す。

$$x = (-1)^s \cdot 2^E \cdot f$$

$$f = (f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_9)_2, \quad f_i = 0 \text{ または } 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 9)$$

符号 $s = 0$ のとき x は正数, $s = 1$ のとき負数となる。指数部では E に 63 を加えている。仮数部では、常に $f_1 = 1$ として正規化を行い、 f_2 から f_9 までを格納する。なお、 x が 0 になる場合は考えない。

15	14	...	...	9	8	7	6	...	...	1	0
s	E + 63						f ₂	f ₃	...	...	f ₈ f ₉

例えば、 $x = 12$ の場合、 $12 = (-1)^0 \times 2^3 \times 1.5$ と表されることから、

$$s = 0 \quad E = 3 \text{ より } E + 63 = 3 + 63 = 66 = (100\ 0010)_2$$

$$f = (1.5)_{10} = (1 + 0.5)_{10} = (1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1})_{10}$$

$$= (1 \cdot 1)_2 = (1 \cdot 1000\ 0000)_2$$

となるため、次のように16ビットで表現される。

$$0100\ 0010\ 1000\ 0000$$

右表の[0]～[4]は、上記の方式による16ビット表現と実数(10進数)の対応を表す。空欄を埋めよ。

	16ビット表現	実数
[0]	0100 0010 1000 0000	12
[1]	0100 0000 0000 0000	[1]
[2]	1100 0011 1100 0000	[2]
[3]	[3]	9
[4]	[4]	-22

問題2 以下のN個の1次方程式からなるN元連立1次方程式を考える。

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{iN}x_N = b_i \quad (i = 1, \dots, N)$$

これを解く代表的な数値解法にガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法がある。これらは、それぞれ、次の(A)と(B)の2段階の処理により、N個の未知数 x_i の解を求める。

ガウス・ジョルダンの方法 (A) 左辺の対角成分 $a_{ii}x_i$ のみを残す (B) $a_{ii}x_i = b_i$ から解 x_i を求める

ガウスの消去法

(A) 前進消去

(B) 後退代入

これらの数値解法について、以下の各問に答えよ。

(1) 次のプログラムは、ガウス・ジョルダンの方法、あるいは、ガウスの消去法で、上記の(A)の処理を行う部分である。ただし、このプログラムでは、上記のN元連立1次方程式の係数 a_{ij} ($i = 1, \dots, N$ ならびに $j = 1, \dots, N$) を配列要素 $a[i-1][j-1]$ に、 b_i を $a[i-1][N]$ に格納し、解 x_i を $a[i-1][N]$ に重ね書きする。空欄(a)～(f)を埋めてプログラムを完成させよ。ただし、(a)～(d)についてはガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法のそれぞれについて別々に答え、(e)についてはガウス・ジョルダンの方法についてのみ答え、(f)については2つの方法で共通の内容を答えよ。

```

#define N 3
float a[N][N+1];
void main( void )
{
    int    i, j, k;
    float p;

    ... 【中略】 ...

1:
2:   for( k = (a); k < (b); k++ ) {
3:       for( i = (c); i < (d); i++ ) {
4:           (e) {
5:               p = a[i][k] / a[k][k];    a[i][k] = 0;
6:               for( j = k+1; j < N+1; j++ ) { a[i][j] = (f); }
7:           }
8:       }
9:   }
10:
    ... 【中略】 ...
}

```

(2) 次の関数 func は、(1) のプログラムで生じる問題を解決するためのものである。どのような問題か説明せよ。また、この関数 func を(1) のプログラム中のどこで呼び出せばよいか、「○行目と□行目の間」のように、行番号を用いて答えよ。さらに、関数 func 中の空欄(g), (h)を埋めて完成させよ。

```

void func( int k )
{
    int    i, j, kmax;
    float aa, amax;

    amax = fabs( (double)a[k][k] );
    kmax = k;
    for( i = k+1; i < N; i++ ) {
        aa = fabs( (double) (g) );
        if( aa > amax ) {
            amax = aa;    kmax = i;
        }
    }
    for( j = 0; j <= N; j++ ) {
        aa = a[k][j];    (h);    a[kmax][j] = aa;
    }
}

```

(3) 次のプログラムは、ガウス・ジョルダンの方法で、上記の(B)の処理を行う部分である。空欄(i)～(k)を埋めてプログラムを完成させよ。

```

for( i = (i); i < (j); i++ ) { a[i][N] = (k); }

```

(4) 次のプログラムは、ガウスの消去法で、上記の(B)の処理を行う部分である。空欄(l)～(q)を埋めてプログラムを完成させよ。

```

a[N-1][N] = a[N-1][N] / a[N-1][N-1];
for( i = (l); i >= (m); i-- ) {
    for( j = (n); j < (o); j++ ) { a[i][N] = (p); }
    a[i][N] = (q);
}

```

問題3 非線形方程式の数値解法について、以下の各問に答えよ。

(1) **2分法**は、初期の区間 $[a, b]$ から開始し、解が存在する区間を順次、半分ずつ狭めていく解法である。2分法により方程式 $f(x) = x + \log x = 0$ の解を求めるプログラムを以下に示す。空欄(a)～(d)を埋めて完成させよ。

```
#define      IMAX  10      /* 最大反復回数 */
#define      EPS   0.01   /* 反復停止規準のための微小値 */

void main( void )
{
    int      i = 0;
    double   a, b, c, fa, fb, fc;

    a = 0.5;      b = 1.0;      c = ( a + b ) / 2.0;
    fa = f( a );  fb = f( b );  fc = f( c );
    while( fabs( fc ) >= EPS ) {
        if( fb * fc < 0 ) { (a); (b); }
        if( fa * fc < 0 ) { (c); (d); }
        c = ( a + b ) / 2.0;  fc = f( c );
        i++;
        if( i >= IMAX ) { break; }
    }
    printf( "方程式の解は %lf¥n", c );
}

double f( double x )
{
    return( x + log( x ) );
}
```

(2) **ニュートン法**は、方程式 $f(x)=0$ の解を求める際、真の解 α に十分に近い初期値 x_0 から開始し、反復式を繰り返し計算することで近似解 $x_0, x_1, x_2, \dots$ を更新していく解法である。

(2-1) 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とし、グラフ $y=f(x)$ 上の点 $(x_i, f(x_i))$ における接線の方程式を書け。

(2-2) 近似解 x_i から x_{i+1} を求めるニュートン法の反復式を書け。

(3) 上記の(2)に関連して、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が容易に求められない場合、ニュートン法の反復式を変形した**割線法**と呼ばれる方法が用いられる。

(3-1) 割線法で用いられる $x = x_i$ における導関数 $f'(x_i)$ を近似する式を書け。

(3-2) 近似解 x_{i+1} を求める割線法の反復式を書け。

(4) 上記の2分法とニュートン法は、ともに、反復処理により近似解を真の解に近付けていく解法である。これらの解法の収束の速さを考えた場合、2分法は1次収束法、ニュートン法は2次収束法である。ここで、 i 回目の反復における近似解 x_i がもつ真の解 α に対する誤差を $e_i = x_i - \alpha$ とし、 $i+1$ 回目の反復における誤差を $e_{i+1} = x_{i+1} - \alpha$ とした場合、誤差 e_i と e_{i+1} がどのような関係になるのかという観点から、一般の $r \geq 1$ に対する r 次収束法とはどのようなものなのかを説明せよ。

問題4 数値積分法の台形公式について、以下の記述中の空欄を適切な式、数値等で埋めよ。

台形公式は、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ に対する積分値

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

を求める代わりに、2点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結ぶ直線と x 軸、および、 $x=a$, $x=b$ に囲まれた部分（台形）の面積を求める近似公式である。この台形の面積 q は、 a , b , $f(a)$, $f(b)$ を用いて以下のように表される。

$$q = \boxed{\quad (a) \quad} \dots\dots ①$$

台形公式の精度を高めるための複合台形公式では、積分区間 $[a, b]$ を細分し、その細分された各区間に台形公式を適用し、それらの和で積分値を近似する。区間 $[a, b]$ を n 等分したとすると、一つの分割区間の幅 h は n , a , b を用いて以下のように表される。

$$h = \boxed{\quad (b) \quad} \dots\dots ②$$

この h を用いて、複合台形公式による積分の近似値 q は、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h \{ f(a+ih) + f(a+(i+1)h) \} \\ &= \boxed{\quad (c) \quad} \left\{ f(a) + \boxed{\quad (d) \quad} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\quad (e) \quad}) + f(b) \right\} \dots\dots ③ \end{aligned}$$

複合台形公式の積分区間の分割数 n を2倍ずつ増やしながら反復的に積分近似値の精度を高めていき、十分に要求精度を満たした段階で反復を停止する方法を自動積分法という。つまり、分割数が n のときの近似値を $q(n)$ とすると、 $n=1$ から開始して $q(1) \rightarrow q(2) \rightarrow q(4) \rightarrow q(8) \rightarrow \dots \rightarrow q(n) \rightarrow q(2n) \rightarrow \dots$ と精度を上げていく。このとき、 $q(2n)$ を求めるのに必要な関数 f の値のうちの約半数は $q(n)$ を求める際にすでに計算されているため、改めて再計算するのは無駄である。そこで、直前に求めた $q(n)$ の値を利用し、新たに必要となる関数値のみを計算するだけで $q(2n)$ の値を得るようにすることで、効率を上げる方法が考えられる。式②の h を h_n とすると、分割数が $2n$ のときの一つの分割区間の幅 h_{2n} は、 n , a , b を用いて以下のように表される。

$$h_{2n} = \boxed{\quad (f) \quad}$$

以下に示すように、はじめに式③により h_{2n} を用いて $q(2n)$ を表し、その式を変形していくことで、 $q(n)$ と新たに必要となる関数値のみから $q(2n)$ を表すことができる。

$$\begin{aligned} q(2n) &= \boxed{\quad (g) \quad} \left\{ f(a) + \boxed{\quad (h) \quad} \sum_{i=1}^{2n-1} f(a + \boxed{\quad (i) \quad}) + f(b) \right\} \quad \leftarrow \text{式③より} \\ &= \boxed{\quad (g) \quad} \left\{ f(a) + \boxed{\quad (h) \quad} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\quad (j) \quad}) + f(b) \right\} + \boxed{\quad (g) \quad} \left\{ \boxed{\quad (h) \quad} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{\quad (k) \quad}) \right\} \\ &= \boxed{\quad (l) \quad} + \boxed{\quad (m) \quad} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{\quad (k) \quad}) \quad \leftarrow q(n) \text{を含む式} \end{aligned}$$

式①で求めた $q(1)$ を開始値として上式を反復的に用いて $q(1) \rightarrow q(2) \rightarrow q(4) \rightarrow q(8) \rightarrow \dots$ を求める。

問題5 微分方程式の初期値問題では、微分方程式

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

について、初期条件 $y(a) = y_a$ を満たす解 $y(x)$ を求める．この方程式を数値的に解く差分法では、 x 軸上の区間 $[a, b]$ を n 等分する．すると、各分割点 x_i は分割区間幅（刻み幅） h を用いて以下のように表される．

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$h = (b - a) / n$$

このとき、 x_i に対する $y(x_i)$ の値は、式①の f を積分することで、以下のように表される．

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

これが方程式①に対する差分方程式であり、初期値 $y(x_0) = y_a$ から開始し、式②を $i = 1, 2, \dots, n$ と逐次的に適用していくことで、解 $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ を得ることができる．

（１）式②の積分部分を近似的に求める代表的な解法の一つが**オイラー法**である．真の値 $y(x_i)$ を近似した値を y_i と書くとする．このとき、オイラー法で y_{i-1} から y_i を求める公式を示し、この公式の意味を図を用いて説明せよ．

（２）オイラー法を改良した**改良オイラー法**による１ステップは次式であらわされる．

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} \{ f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})) \}$$

この式がどのような考え方でオイラー法を改良したものなのか、上記の（１）で答えたオイラー法の公式との関係から述べよ．

（３）**ルンゲ・クッタ法**の１ステップは次式であらわされる．

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$k_2 = f(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + hk_1/2)$$

$$k_3 = f(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + hk_2/2)$$

$$k_4 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3)$$

これは、オイラー法の考え方にに基づき、改良オイラー法をさらに改善して解の精度を高めるものである．この改善の方法について述べよ．

（４）上記のオイラー法、改良オイラー法、ルンゲ・クッタ法は、微分方程式

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = 0$$

を解くとき、式②の積分部分における関数 f の積分をどのように近似するのか、それぞれの方法について、解答用紙の図を用いて説明せよ．

問題6 相異なる $n+1$ 個のデータ点 $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ を通過する関数 $f(x)$ をできるだけ時間計算量の少ない関数 $P(x)$ で近似する**関数近似**について、以下の各問に答えよ.

(1) 以下の空欄を埋めよ.

関数 $f(x)$ を関数 $P(x)$ で**補間**する場合、関数 $P(x)$ は次の補間の条件を満たす必要がある.

$$\boxed{\text{(a)}}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \dots\dots \text{①}$$

ラグランジュ補間は、この関数 $P(x)$ として、以下の n 次多項式 $P_n(x)$ を用いる.

$$P_n(x) = \boxed{\text{(b)}}$$

$$\phi_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \dots\dots \text{②}$$

式②の関数は $x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$, のとき以下の値を取るため、多項式 $P_n(x)$ は式①の条件を満たす.

$$\phi_j(x_i) = \begin{cases} \boxed{\text{(c)}} & (i = j \text{ のとき}) \\ \boxed{\text{(d)}} & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) 関数 $P(x)$ として $P(x) = ax + b$ を用いる**最小2乗法**について、以下の問いに答えよ.

(2-1) データ値 f_i と関数値 $P(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, に関する残差の2乗和 E を書け.

(2-2) 上記の E を最小化するように関数 $P(x)$ の係数 a と b を決定する方法について書け.

平成30年度後期 数値計算 期末テスト 解答用紙

平成 年度入学 学籍番号 氏名

問題1 (1)

[1a] [1b]

[2a] [2b]

[3a] [3b]

[4]

[5]

[6]

(2) [1] [2]

[3]

[4]

問題2 (1) ガウス・ジョルダンの方法

(a) (b)

(c) (d)

(e)

ガウスの消去法

(a) (b)

(c) (d)

ガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法で共通

(f)

(2)

呼び出す場所： 行目と 行目の間

(g)

(h)

問題2 (3) (i) (j)

(k)

(4) (l) (m)

(n) (o)

(p)

(q)

問題3 (1)

(a) (b)

(c) (d)

(2)

(2-1)

(2-2)

(3)

(3-1)

(3-2)

(4)

問題4 (a)

(b) (c)

(d) (e)

(f) (g)

(h) (i)

(j) (k)

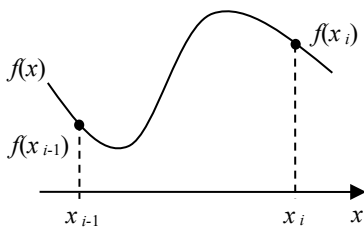
(l) (m)

問題5 (1)

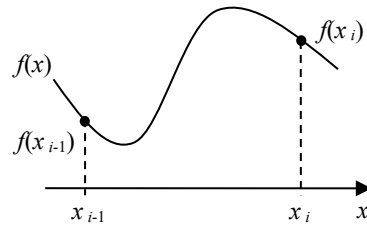
(2)

(3)

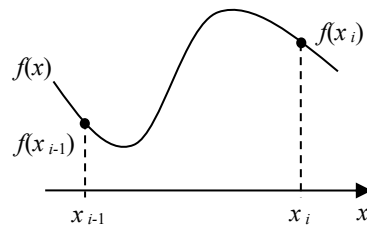
(4) オイラー法



問題5 (4) 改良オイラー法



ルンゲ・クッタ法



問題6 (1)

(a) _____

(b) _____

(c) _____ (d) _____

(2) (2-1)

(2-2)