

平成29年度後期 数値計算 期末テスト

問題1 数値の表現について、以下の各問に答えよ。

(1) **整数型**の数値表現では、与えられたビットの2進数で整数を表現する。16ビットを用いて10進数の整数(10進整数) x を表現する場合について、以下の各問に答えよ。なお、答は指数形式($2^\square$ のような形式)を含んだ形のままでよい。

(1-1) 表現可能な整数の個数(何通りの整数が表現できるか)を書け。

(1-2) 次の(a), (b)の場合について、表現可能な10進整数 x の範囲を $\bigcirc \leq x \leq \triangle$ という形式で書け。

(a) 0と正数のみを表現する場合(負数は表現しない)

(b) 0, 正数, 負数を表現する場合(負数は2の補数を用いて表現する)

(1-3) 上記の(a), (b)の場合では、同じ16ビットの2進数でも、異なる10進整数を表す場合がある。次の各々の16ビット2進数が表す10進整数を(a)と(b)の場合について書け。

[1] 0000 0000 0000 0101 [2] 1000 0000 0000 0011 [3] 1111 1111 1111 1111

(2) **浮動小数点型**の数値表現について、下図のように16ビットで実数 x を表現することを考える。すなわち、第15ビットに符号 s 、第14～8ビットの7ビットに指数 E 、第7～0ビットの8ビットに仮数 f を割り当て、実数 x を次のように表す。

$$x = (-1)^s 2^E f$$

$$f = (f_1 . f_2 f_3 \dots f_9)_2, \quad f_i = 0 \text{ または } 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 9)$$

符号 $s = 0$ のとき x は正数、 $s = 1$ のとき負数となる。指数部では E に63を加えている。仮数部では、常に $f_1 = 1$ として正規化を行い、 f_2 から f_9 までを格納する。なお、 x が0になる場合は考えない。

15	14	...	...	8	7	6	...	...	0
s	E + 63					f ₂ f ₃ ...	... f ₉		

例えば、 $x = 12$ の場合、 $12 = (-1)^0 \times 2^3 \times 1.5$ と表されることから、

$$s = 0 \quad E = 3 \text{ より } E + 63 = 3 + 63 = 66 = (100\ 0010)_2$$

$$f = (1.5)_{10} = (1 + 0.5)_{10} = (1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1})_{10}$$

$$= (1 . 1)_2 = (1 . 1000\ 0000)_2$$

となるため、次のように16ビットで表現される。

$$0100\ 0010\ 1000\ 0000$$

この表現方式に関して、以下の各問に答えよ。

(2-1) 空欄に値を入れよ。 $\log_{10} 2 = 0.301$ とし、(b)は四捨五入して小数点以下第2位まで示せ。

f_1 を含めると、この表現の実質的な仮数部のビット数は (a) ビットとなる。

よって、 $2^{\text{(a)}} = 10^{\text{(b)}}$ の計算から、有効桁数は10進数換算で (b) 桁となる。

(2-2) 指数部 $E + 63$ の値として、最小値 000 0000 ならびに最大値 111 1111 は特別な使い方をするものとして通常は使用しないようにした場合、指数 E の値の最小値と最大値を10進数で答えよ。

(2-3) 以下の空欄を埋めよ。ただし、(a), (b), (f)は8ビットの2進数で、他は10進数で答えよ。

$f_1 = 1$ の場合、仮数 f が取る最小値は $f = (1 . \text{(a)})_2$ であり、最大値は $f = (1 . \text{(b)})_2$ である。よって、(2-2)の結果と合わせると、実数 x が正数($s = 0$)の場合、 x が取り得る最小値は、

$$x = 2^{\text{(c)}} \times (1 . \text{(a)})_2 = 2^{\text{(c)}} \times (\text{(d)})_{10}$$

となる。また、最大値は、

$$\begin{aligned} x &= 2^{\text{(e)}} \times (1 . \text{(b)})_2 = 2^{\text{(e)}} \times (10 - 0 . \text{(f)})_2 \\ &= 2^{\text{(e)}} \times (2 - 2^{\text{(g)}})_{10} \end{aligned}$$

となる。

(2-4) この表現方式で 0011 1111 0010 0000 と表される値を10進数で表せ。

(2-5) この表現方式で10進数の -10 を表した場合、どのように16ビットで表現されるかを書け。

問題2 連立1次方程式の解法について、以下の各問に答えよ。

(1) 次の3元連立1次方程式を**ガウス・ジョルダンの方法**で解くことを考える。

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \quad \dots(1)$$

$$-4x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 31 \quad \dots(2)$$

$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \quad \dots(3)$$

以下の空欄に値を入れよ。(1-1)で未知数 $x_1 \sim x_3$ の項が消去された場合、係数が0と考えること。解答数が多いので、**解答欄を間違えないこと!**

(1-1) まず、式(1)を基準式として用いて、適切な式から x_1 の項を消去する。

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \quad \dots(1)'$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 13 \quad \dots(2)'$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 20 \quad \dots(3)'$$

次に、式(2)'を基準式として用いて、適切な式から x_2 の項を消去する。

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 4 \quad \dots(1)''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 13 \quad \dots(2)''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = -6 \quad \dots(3)''$$

さらに、式(3)''を基準式として用いて、適切な式から x_3 の項を消去する。

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 2 \quad \dots(1)'''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 9 \quad \dots(2)'''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = -6 \quad \dots(3)'''$$

(1-2) 上記の式(1)'''~(3)'''から、最終的に解は以下のように求められる。

$$x_1 = \boxed{(d)}$$

$$x_2 = \boxed{(e)}$$

$$x_3 = \boxed{(f)}$$

(2) 次の3元連立1次方程式を**ガウスの消去法**で解くことを考える。

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \quad \dots(1)$$

$$8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -29 \quad \dots(2)$$

$$-4x_1 + 5x_2 - x_3 = 32 \quad \dots(3)$$

(2-1) **前進消去**の最終的な結果として得られる3つの式を書け。なお、式(1)~(3)の上下の順序を変えずに前進消去を行い、結果として得られた3つの式の上下の順序を変えないで解答すること。また、得られた式の両辺を共通の値で割って簡単化したり係数の正負を変えたり等もしないで、前進消去の手順で得られた3つの式をそのままの形で書くこと。

(2-2) 上記の(2-1)の結果を用いて**後退代入**により未知数 $x_1 \sim x_3$ の解を求めよ。ただし、後退代入で解を求める途中過程がわかるように解答すること。

問題3 非線形方程式の数値解法について、以下の各問に答えよ。

(1) **2分法**で方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考える。ただし、関数 $f(x)$ は、任意の a, b ($a < b$) に対して $f(a) < f(b)$ を満たすものとする。

(1-1) ある反復時点で真の解を含む x 軸上の区間 $[a, b]$ が得られているものとする。その区間の中点 c に対して $f(c) > 0$ の場合、2分法により区間 $[a, b]$ から幅を半分にした真の解を含む区間を書け。

(1-2) 2分法では、はじめに反復0回目として与えた真の解を含む区間 $[a_0, b_0]$ とその中点 c_0 から開始し、(1-1)の方法で区間の幅を半分にする処理を反復する。そして、あらかじめ定めた正数 ε に対して反復停止規準 $|f(c)| < \varepsilon$ を満たした時点で反復を終了し、そのときの中点 c の値を最終的な近似解とする。ここで、2分法により、次の条件で方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考える。

$$f(x) = 2x - 11, \quad [a_0, b_0] = [0, 32], \quad \varepsilon = 2$$

このとき、反復の開始から終了までの各反復回 (0, 1, 2, ...) で中点 c と $f(c)$ がとる値を書け。ただし、解答の表中の全ての箇所を埋める必要はなく、反復を終了する反復回までの値を書け。

(2) **ニュートン法**は、方程式 $f(x) = 0$ の解を求める際、真の解 α に十分に近い初期値 x_0 から開始し、反復式を繰り返し計算することで近似解 $x_0, x_1, x_2, \dots$ を更新していく解法である。

(2-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を用いて、 $y = f(x)$ 上の点 $(x_i, f(x_i))$ における接線の方程式を書け。

(2-2) 近似解 x_i から x_{i+1} を求めるニュートン法の反復式を書け。

(3) 上記の(2)に関連して、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が容易に求められない場合、ニュートン法の反復式を変形した**割線法**と呼ばれる方法が用いられる。

(3-1) 割線法で用いられる $x = x_i$ における導関数 $f'(x_i)$ を近似する式を書け。

(3-2) 近似解 x_{i+1} を求める割線法の反復式を書け。

問題4 数値積分法では、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ に対する積分値

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad \dots\dots ①$$

を近似的に求める。

- (1) **台形公式**で式①を近似する方法について、解答用紙中の図を用いて説明し、その公式を書け。
- (2) **シンプソン公式**で式①を近似する方法について、解答用紙中の図を用いて説明し、その公式を書け。
- (3) 次の記述中の空欄を適切な式、数値等で埋めよ。

台形公式の精度を高めるための複合台形公式では、積分区間 $[a, b]$ を細分し、その細分された各区間に台形公式を適用し、それらの和で積分値を近似する。区間 $[a, b]$ を n 等分したとすると、一つの分割区間の幅 h は n, a, b を用いて以下のように表される。

$$h = \boxed{(b)} \quad \dots\dots ②$$

この h を用いて、複合台形公式による積分の近似値 q は、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h \{ f(a+ih) + f(a+(i+1)h) \} \\ &= \boxed{(c)} \left\{ f(a) + \boxed{(d)} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{(e)}) + f(b) \right\} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

複合台形公式の積分区間の分割数 n を2倍ずつ増やしながら反復的に積分近似値の精度を高めていき、十分に要求精度を満たした段階で反復を停止する方法を自動積分法という。つまり、分割数が n のときの近似値を $q(n)$ とすると、 $n=1$ から開始して $q(1) \rightarrow q(2) \rightarrow q(4) \rightarrow q(8) \rightarrow \dots \rightarrow q(n) \rightarrow q(2n) \rightarrow \dots$ と精度を上げていく。このとき、 $q(2n)$ を求めるのに必要な関数 f の値のうちの約半数は $q(n)$ を求める際にすでに計算されているため、改めて再計算するのは無駄である。そこで、直前に求めた $q(n)$ の値を利用し、新たに必要となる関数値のみを計算するだけで $q(2n)$ の値を得るようにすることで、効率を上げる方法が考えられる。式②の h を h_n とすると、分割数が $2n$ のときの一つの分割区間の幅 h_{2n} は、 n, a, b を用いて以下のように表される。

$$h_{2n} = \boxed{(f)}$$

以下に示すように、はじめに式③により h_{2n} を用いて $q(2n)$ を表し、その式を変形していくことで、 $q(n)$ と新たに必要となる関数値のみから $q(2n)$ を表すことができる。

$$\begin{aligned} q(2n) &= \boxed{(g)} \left\{ f(a) + \boxed{(h)} \sum_{i=1}^{2n-1} f(a + \boxed{(i)}) + f(b) \right\} \quad \leftarrow \text{式③より} \\ &= \boxed{(g)} \left\{ f(a) + \boxed{(h)} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{(j)}) + f(b) \right\} + \boxed{(g)} \left\{ \boxed{(h)} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{(k)}) \right\} \\ &= \boxed{(l)} + \boxed{(m)} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{(k)}) \quad \leftarrow q(n) \text{を含む式} \end{aligned}$$

(4) 次の記述中の空欄を適切な式, 数値等で埋めよ.

シンプソン公式についても, 台形公式と同様, (3) の式②で表される区間 $[a, b]$ の n 等分 (n は偶数) による分割区間幅 h を用いて, 複合公式は以下になる. ただし, 偶数 n を $n = 2m$ と表す.

$$q = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{3} h \{ f(a+2ih) + 4f(a + \boxed{(c)}) + f(a + \boxed{(d)}) \}$$

$$= \frac{1}{3} h \left\{ \underbrace{f(a) + f(b)}_{(あ)} + 2 \sum_{i=0}^{m-2} \underbrace{f(a + \boxed{(e)})}_{(い)} + 4 \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{f(a + \boxed{(f)})}_{(う)} \right\} \dots\dots ⑤$$

ここで, 分割数が n のときの積分近似値を $q(n)$ とし, 分割区間幅 h を h_n と表すと, 式⑤の (あ), (い), (う) を $O(n)$, $T(n)$, $F(n)$ と表すことで次式を得る.

$$q(n) = \boxed{(g)} \{ O(n) + 2T(n) + 4F(n) \}$$

台形公式と同様, シンプソン公式でも分割数 n を2倍ずつ増やしながら積分近似値の精度を高めていく自動積分法が考えられる. シンプソン公式では, 自動積分の各反復において, 分割数 n の近似値 $q(n)$ を構成する $O(n)$, $T(n)$, $F(n)$ を利用して, 関数 f の無駄な計算を行なうことなく分割数 $2n$ の $O(2n)$, $T(2n)$, $F(2n)$ を以下のように得ることで, 近似値 $q(2n)$ を効率的に求める. なお, 分割数 $2n$ の分割区間幅を h_{2n} とする.

$$q(2n) = \boxed{(h)} \{ O(2n) + 2T(2n) + 4F(2n) \}$$

$$O(2n) = \boxed{(i)} \quad T(2n) = \boxed{(j)} \quad F(2n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \boxed{(k)})$$

問題5 微分方程式の初期値問題では, 微分方程式

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \quad \dots\dots\dots ①$$

について, 初期条件 $y(a) = y_a$ を満たす解 $y(x)$ を求める. この方程式を数値的に解く差分法では, x 軸上の区間 $[a, b]$ を n 等分する. すると, 各分割点 x_i は分割区間幅 (刻み幅) h を用いて以下のように表される.

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$h = (b - a) / n$$

このとき, x_i に対する $y(x_i)$ の値は, 式①の f を積分することで, 以下のように表される.

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \quad \dots\dots\dots ②$$

これが方程式①に対する差分方程式であり, 初期値 $y(x_0) = y_a$ から開始し, 式②を $i = 1, 2, \dots, n$ と逐次的に適用していくことで, 解 $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ を得ることができる.

(1) 式②の積分部分を近似的に求める代表的な解法の一つが**オイラー法**である. 真の値 $y(x_i)$ を近似した値を y_i と書くとする. このとき, オイラー法で y_{i-1} から y_i を求める公式を示し, この公式の意味を図を用いて説明せよ.

(2) オイラー法を改良した**改良オイラー法**による1ステップは次式であらわされる.

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} \{ f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})) \}$$

この式がどのような考え方でオイラー法を改良したものなのか, 上記の (1) で答えたオイラー法の公式との関係から述べよ.

問題6 関数近似の補間について、以下の空欄を埋めよ。

相異なる $n+1$ 個のデータ点 $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \dots, (x_n, f_n)$ を通過する関数 $f(x)$ をできるだけ時間計算量の少ない関数 $P(x)$ で補間することを考える。この場合、関数 $P(x)$ は次の補間の条件を満たす必要がある。

$$\boxed{\text{(a)}}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \dots\dots \text{①}$$

ラグランジュ補間は、この関数 $P(x)$ として、以下に示す n 次多項式 $P_n(x)$ を用いる。

$$P_n(x) = \boxed{\text{(b)}}$$

$$\phi_j(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad \dots\dots \text{②}$$

式②の関数は $x = x_i, i = 0, 1, \dots, n$, のとき以下の値を取るため、多項式 $P_n(x)$ は式①の条件を満たす。

$$\phi_j(x_i) = \begin{cases} \boxed{\text{(c)}} & (i = j \text{ のとき}) \\ \boxed{\text{(d)}} & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

問題7 以下のプログラムは、変数 x に関する次の3つの値

$$(\text{値1}) = 2x^2 - 3x + 4, \quad (\text{値2}) = -x^2 + 5x + 9, \quad (\text{値3}) = 7x^2 + 6x - 8$$

の合計値をグラフ化するものである。具体的には、区間 $[0, 1]$ 上で等間隔に 501 点を取った各 x の値に対する合計値を座標平面上にプロットする。プログラム中の関数 `plot(x, c)` は、グラフ上の座標値 (x, c) をプロットするものである。しかし、このプログラムは、このままでは効率が悪く、無駄な時間計算量を要する。そこで、適切な“前処理”を用いて時間計算量を削減する方法を述べよ。言葉で説明しても良いし、プログラムの形で示しても良い。

```
void plot( double x, double c );
double a[3][3] = {{ 2.0, -3.0, 4.0}, {-1.0, 5.0, 9.0}, { 7.0, 6.0, -8.0}};

void main( void )
{
    int    i, n;
    double x, dx, b[3], c;

    n = 500;
    dx = 1.0 / n;
    for( i = 0; i <= n; i++ ) {
        x = dx * i;
        b[0] = a[0][0] * x * x + a[0][1] * x + a[0][2];
        b[1] = a[1][0] * x * x + a[1][1] * x + a[1][2];
        b[2] = a[2][0] * x * x + a[2][1] * x + a[2][2];
        c = b[0] + b[1] + b[2];
        plot( x, c );
    }
    exit( 0 );
}
```

平成29年度後期 数値計算 期末テスト 解答用紙

平成 年度入学 学籍番号 氏名

問題1 (1) (1-1) _____

(1-2) (a) _____

(b) _____

(1-3)

	[1]	[2]	[3]
(a)			
(b)			

(2) (2-1) (a) _____ (b) _____

(2-2) 最小値 _____ 最大値 _____

(2-3) (a) _____

(b) _____ (c) _____

(d) _____ (e) _____

(f) _____ (g) _____

(2-4) _____ (2-5) _____

問題2 (1) (1-1)

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (2) ' _____

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (3) ' _____

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (1) ' ' _____

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (2) ' ' _____

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (3) ' ' _____

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (1) ' ' ' _____

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (2) ' ' ' _____

(a) _____ (b) _____ (c) _____ ... (3) ' ' ' _____

(1-2) (d) _____ (e) _____ (f) _____

(2) (2-1)

問題2 (2) (2-2)

問題3 (1) (1-1)

(1-2)

反復回	0	1	2	3	4
c					
f(c)					

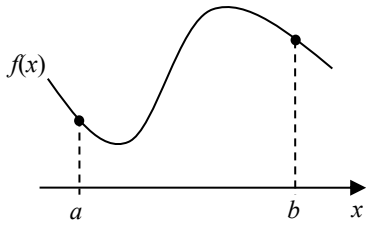
(2) (2-1)

(2-2)

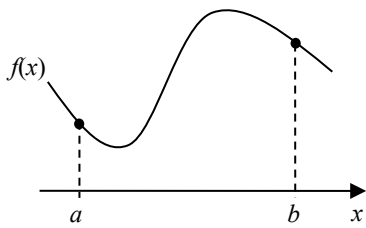
(3) (3-1)

(3-2)

問題4 (1)



(2)



(3) ★都合により (a) はありません。

(b) _____ (c) _____

(d) _____ (e) _____

(f) _____ (g) _____

(h) _____ (i) _____

(j) _____ (k) _____

(l) _____ (m) _____

(4) ★都合により (a), (b) はありません。

(c) _____ (d) _____

(e) _____ (f) _____

(g) _____ (h) _____

(i) _____ (j) _____

(k) _____

問題5 (1)

(2)

問題6

(a) _____

(b) _____

(c) _____ (d) _____

問題7