平成２８年度後期　数値計算法　期末テスト

問題１　浮動小数点型の数値表現における有効桁数を考慮して，次の 10 進数の計算を行うことを考える．

(a) `1234 + 1.456 - 1233`　　(b) `5005 × 3 ÷ 5`　　(c) `103 × 103 - 102 × 102`

それぞれの計算について以下の問に答えよ．なお，有効桁数 10 進 4 桁での 10 進数の表現では，`12345` は `12340` となり，`1234.5` は `1234` となり，`12.345` は `12.34` となり，`0.012345` は `0.01234` となる．

（１）それぞれの計算の正確な答を書け．
（２）それぞれの計算を有効桁数 10 進 4 桁で行った場合の答を書け．ただし，計算の規則として，加減算より乗除算を優先し，また，加減算どうしと乗除算どうしは左から右に向かって書かれている順番に行うこととする．
（３）（１）の答に対する（２）の答が持つ絶対誤差の大きさ，ならびに，相対誤差の大きさを書け．なお，相対誤差の大きさは分数の形で書いてもよい．
（４）（２）の計算の規則に従って計算しても正確な答を得るためには有効桁数が 10 進で何桁あれば十分か，その最低桁数を書け．
（５）（２）の計算の規則に従わなくてもよい場合，どのような工夫をすれば有効桁数 10 進 4 桁でも正確な答が得られるか，その工夫を書け．

問題２　連立１次方程式の解法について，以下の各問に答えよ．

（１）次の３元連立１次方程式を**ガウス・ジョルダンの方法**で解くことを考える．

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \quad \cdots(1)$$
$$-4x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 31 \quad \cdots(2)$$
$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \quad \cdots(3)$$

以下の空欄に値を入れよ．(1-1) で未知数 x_1〜x_3 の項が消去された場合，係数が 0 と考えること．解答数が多いので，**解答欄を間違えないこと！**

(1-1) まず，式(1)を基準式として用いて，適切な式から x_1 の項を消去する．

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \quad \cdots(1)'$$
$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = 13 \quad \cdots(2)'$$
$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = 20 \quad \cdots(3)'$$

次に，式(2)'を基準式として用いて，適切な式から x_2 の項を消去する．

$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = 4 \quad \cdots(1)''$$
$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = 13 \quad \cdots(2)''$$
$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = -6 \quad \cdots(3)''$$

さらに，式(3)''を基準式として用いて，適切な式から x_3 の項を消去する．

$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = 2 \quad \cdots(1)'''$$
$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = 9 \quad \cdots(2)'''$$
$$\boxed{\text{(a)}}\,x_1 + \boxed{\text{(b)}}\,x_2 + \boxed{\text{(c)}}\,x_3 = -6 \quad \cdots(3)'''$$

(1-2) 上記の式(1)'''〜(3)'''から，最終的に解は以下のように求められる．

$$x_1 = \boxed{\text{(d)}}$$
$$x_2 = \boxed{\text{(e)}}$$
$$x_3 = \boxed{\text{(f)}}$$

（2）次のプログラムは，**ガウス・ジョルダンの方法**，あるいは，**ガウスの消去法**でＮ元連立１次方程式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{iN}x_N = b_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad \dots(A)$$

を解くプログラムであり，ガウス・ジョルダンの方法での上記の設問(1-1)，あるいは，ガウスの消去法の前進消去の処理を行う部分である．このプログラムでは，式(A)の左辺の係数 a_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$) を配列要素 a[i-1][j-1]に，右辺の定数項 b_i を a[i-1][N]に格納し，解 x_i を a[i-1][N]に重ね書きする．空欄(a)～(f)を埋めて完成させよ．ただし，(a)～(d)はガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法のそれぞれについて別々に答え，(e)はガウス・ジョルダンの方法についてのみ答え，(f)は２つの方法で共通の内容を答えよ．

```
#define N 3
float a[N][N+1];
void main( void )
{
    int   i, j, k;
    float p;

    ･･･【中略】･･･

    for( k = [   (a)   ]; k < [   (b)   ]; k++ ) {
      for( i = [   (c)   ]; i < [   (d)   ]; i++ ) {
        [   (e)   ] {
          p = a[i][k] / a[k][k];   a[i][k] = 0;
          for( j = k+1; j < N+1; j++ ) { a[i][j] = [   (f)   ]; }
        }
      }
    }

    ･･･【中略】･･･
}
```

（3）次のプログラムは，**ガウス・ジョルダンの方法**で上記の設問(1-2)の処理を行う部分である．空欄(i)～(k)を埋めてプログラムを完成させよ．

```
for( i = [   (i)   ]; i < [   (j)   ]; i++ ) { a[i][N] = [   (k)   ]; }
```

（4）次のプログラムは，**ガウスの消去法**の後退代入の処理を行う部分である．空欄(l)～(q)を埋めてプログラムを完成させよ．

```
a[N-1][N] = a[N-1][N] / a[N-1][N-1];
for( i = [   (l)   ]; i >= [   (m)   ]; i-- ) {
  for( j = [   (n)   ]; j < [   (o)   ]; j++ ) { a[i][N] = [   (p)   ]; }
  a[i][N] = [   (q)   ];
}
```

問題３　非線形方程式の数値解法について，以下の各問に答えよ．

（１）**２分法**は，初期の区間[a, b]から開始し，解が存在する区間を順次，半分ずつ狭めていく解法である．２分法により方程式 f(x) = x + log x = 0 の解を求めるプログラムを以下に示す．空欄(a)～(d)を埋めて完成させよ．

```
#define         IMAX  10      /* 最大反復回数 */
#define         EPS   0.01    /* 反復停止規準のための微小値 */

void main( void )
{
    int     i = 0;
    double  a, b, c, fa, fb, fc;

    a = 0.5;       b = 1.0;       c = ( a + b ) / 2.0;
    fa = f( a );    fb = f( b );    fc = f( c );
    while( fabs( fc ) >= EPS ) {
        if( fb * fc < 0 ) { [  (a)  ]; [  (b)  ]; }
        if( fa * fc < 0 ) { [  (c)  ]; [  (d)  ]; }
        c = ( a + b ) / 2.0;    fc = f( c );
        i++;
        if( i >= IMAX ) { break; }
    }
    printf( "方程式の解は %lf¥n", c );
}

double f( double x )
{
    return( x + log( x ) );
}
```

（２）**ニュートン法**は，方程式 f (x) = 0 の解を求める際，真の解 α に十分に近い初期値 x_0 から開始し，反復式を繰り返し計算することで近似解 x_0，x_1，x_2，．．． を更新していく解法である．

(2-1) 関数 f (x) の導関数を f '(x) とし，グラフ y = f (x) 上の点 (x_i, f (x_i)) における接線の方程式を書け．

(2-2) 近似解 x_i から x_{i+1} を求めるニュートン法の反復式を書け．

（３）上記の（２）に関連して，関数 f (x) の導関数 f '(x) が容易に求められない場合，ニュートン法の反復式を変形した**割線法**と呼ばれる方法が用いられる．

(3-1) 割線法で用いられる $x = x_i$ における導関数 f '(x_i) を近似する式を書け．

(3-2) 近似解 x_{i+1} を求める割線法の反復式を書け．

（４）上記の２分法とニュートン法は，ともに，反復処理により近似解を真の解に近付けていく解法である．これらの解法の収束の速さを考えた場合，２分法は１次収束法，ニュートン法は２次収束法である．ここで，i 回目の反復における近似解 x_i がもつ真の解 α に対する誤差を $e_i = x_i - \alpha$ とし，i+1 回目の反復における誤差を $e_{i+1} = x_{i+1} - \alpha$ とした場合，誤差 e_i と e_{i+1} がどのような関係になるのかという観点から，一般の r ≧ 1 に対する r 次収束法とはどのようなものなのかを説明せよ．

問題４　台形公式について，以下の記述中の空欄を適切な式，数値等で埋めよ．

台形公式は，関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ に対する積分値

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

を求める代わりに，２点 $(a, f(a))$，$(b, f(b))$ を結ぶ直線と x 軸，および，$x = a$，$x = b$ に囲まれた部分（台形）の面積を求める近似公式である．この台形の面積 q は，a，b，$f(a)$，$f(b)$を用いて以下のように表される．

$$q = \boxed{\text{(a)}} \qquad \text{......} \; ①$$

台形公式の精度を高めるための複合台形公式では，積分区間 $[a, b]$ を細分し，その細分された各区間に台形公式を適用し，それらの和で積分値を近似する．区間 $[a, b]$ を n 等分したとすると，一つの分割区間の幅 h は n，a，b を用いて以下のように表される．

$$h = \boxed{\text{(b)}} \qquad \text{......} \; ②$$

この h を用いて，複合台形公式による積分の近似値 q は，以下のように求められる．

$$q = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h \left\{ f(a+ih) + f(a+(i+1)h) \right\}$$

$$= \boxed{\text{(c)}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(d)}} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\text{(e)}}) + f(b) \right\} \qquad \text{......} \; ③$$

複合台形公式の積分区間の分割数 n を２倍ずつ増やしながら反復的に積分近似値の精度を高めていき，十分に要求精度を満たした段階で反復を停止する方法を自動積分法という．つまり，分割数が n のときの近似値を $q(n)$とすると，$n = 1$ から開始して $q(1) \to q(2) \to q(4) \to q(8) \to \ldots \to q(n) \to q(2n) \to \ldots$ と精度を上げていく．このとき，$q(2n)$を求めるのに必要な関数 f の値のうちの約半数は $q(n)$を求める際にすでに計算されているため，改めて再計算するのは無駄である．そこで，直前に求めた $q(n)$の値を利用し，新たに必要となる関数値のみを計算するだけで $q(2n)$の値を得るようにすることで，効率を上げる方法が考えられる．式②の h を h_n とすると，分割数が $2n$ のときの一つの分割区間の幅 h_{2n} は，n，a，b を用いて以下のように表される．

$$h_{2n} = \boxed{\text{(f)}}$$

以下に示すように，はじめに式③により h_{2n} を用いて $q(2n)$を表し，その式を変形していくことで，$q(n)$と新たに必要となる関数値のみから $q(2n)$を表すことができる．

$$q(2n) = \frac{1}{\boxed{\text{(g)}}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^{2n-1} f(a + \boxed{\text{(i)}}) + f(b) \right\} \qquad \leftarrow \text{式③より}$$

$$= \frac{1}{\boxed{\text{(g)}}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\text{(j)}}) + f(b) \right\} + \frac{1}{\boxed{\text{(g)}}} \left\{ \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^{n} f(a + \boxed{\text{(k)}}) \right\}$$

$$= \frac{1}{\boxed{\text{(l)}}} + \boxed{\text{(m)}} \sum_{i=1}^{n} f(a + \boxed{\text{(k)}})$$

← $q(n)$を含む式

式①で求めた $q(1)$を開始値として上式を反復的に用いて $q(1) \to q(2) \to q(4) \to q(8) \to \ldots$ を求める．

問題５　微分方程式の初期値問題では，微分方程式

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \le x \le b \qquad \cdots\cdots ①$$

について，初期条件 $y(a) = y_a$ を満たす解 $y(x)$ を求める．この方程式を数値的に解く差分法では，x 軸上の区間［a, b］を n 等分する．すると，各分割点 x_i は分割区間幅（刻み幅）h を用いて以下のように表される．

$$x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\ldots,n$$

$$h = (b-a)/n$$

このとき，x_i に対する $y(x_i)$ の値は，式①の f を積分することで，以下のように表される．

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)dx \qquad \cdots\cdots ②$$

これが方程式①に対する差分方程式であり，初期値 $y(x_0) = y_a$ から開始し，式②を $i = 1, 2, \ldots, n$ と逐次的に適用していくことで，解 $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_n)$ を得ることができる．

（１）式②の積分部分を近似的に求める代表的な解法の一つが**オイラー法**である．真の値 $y(x_i)$ を近似した値を y_i と書くとする．このとき，オイラー法で y_{i-1} から y_i を求める公式を示し，この公式の意味を図を用いて説明せよ．

（２）オイラー法を改良した**改良オイラー法**による１ステップは次式であらわされる．

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\{f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}))\}$$

この式がどのような考え方でオイラー法を改良したものなのか，上記の（１）で答えたオイラー法の公式との関係から述べよ．

（３）**ルンゲ・クッタ法**の１ステップは次式であらわされる．

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1})$$

$$k_2 = f(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + hk_1/2)$$

$$k_3 = f(x_{i-1} + h/2, y_{i-1} + hk_2/2)$$

$$k_4 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3)$$

これは，オイラー法の考え方に基づき，改良オイラー法をさらに改善して解の精度を高めるものである．この改善の方法について述べよ．

（４）上記のオイラー法，改良オイラー法，ルンゲ・クッタ法は，微分方程式

$$y'(x) = f(x), \quad y(0) = 0$$

を解くとき，式②の積分部分における関数 f の積分をどのように近似するのか，それぞれの方法について，解答用紙の図を用いて説明せよ．

問題６　相異なる n+1 個のデータ点(x_0, f_0)，(x_1, f_1)，．．．．，(x_n, f_n)を通過する関数 f(x)をできるだけ時間計算量の少ない関数 P(x)で近似する**関数近似**について，以下の各問に答えよ．

（１）**ラグランジュ補間**では，n 次多項式 $P_n(x)$を用いて関数 f(x)を近似する．このとき，$P_n(x)$が満たす補間の条件を書け．

（２）**最小２乗法**では，通常，$m < n$ である m 次多項式 $P_m(x)$を用いて関数 f(x)を近似する．この場合，残差の２乗和 E を最小とする $P_m(x)$を求める．この残差の２乗和 E の式を書け．

平成２８年度後期　数値計算法　期末テスト　解答用紙

平成　　　年度入学　学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　　　氏名

問題１　★解答場所を間違えないこと！

	（１）	（２）	（４）
(a)			
(b)			
(c)			

（３）

	(a)	(b)	(c)
絶対誤差の大きさ			
相対誤差の大きさ			

（５） (a)

(b)

(c)

問題２（１）(1−1)

(a)　(b)　(c)　…(2)′

(a)　(b)　(c)　…(3)′

(a)　(b)　(c)　…(1)′′

(a)　(b)　(c)　…(2)′′

(a)　(b)　(c)　…(3)′′

(a)　(b)　(c)　…(1)′′′

(a)　(b)　(c)　…(2)′′′

(a)　(b)　(c)　…(3)′′′

(1−2) (d)　(e)　(f)

問題２（２）ガウス・ジョルダンの方法

(a)　(b)

(c)　(d)

(e)

ガウスの消去法

(a)　(b)

(c)　(d)

ガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法で共通

(f)

（３）(i)　(j)

(k)

（４）(l)　(m)

(n)　(o)

(p)

(q)

問題３（１）

(a)　(b)

(c)　(d)

（２）

(2−1)

(2−2)

（３）

(3−1)

(3−2)

問題３（４）

問題４ (a)

(b) (c)

(d) (e)

(f) (g)

(h) (i)

(j) (k)

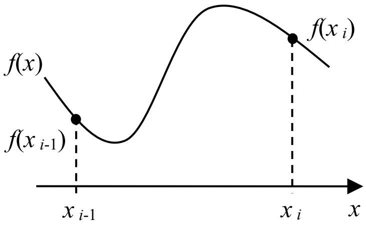
(l) (m)

問題５（１）

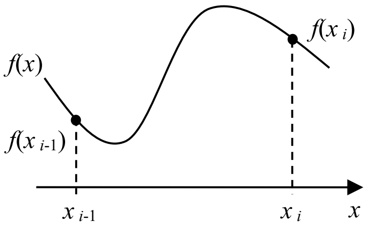
（２）

問題５（３）

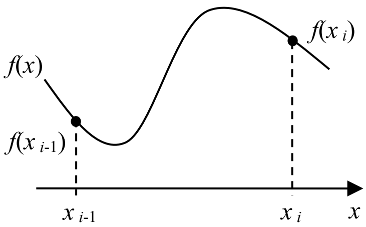
（４） オイラー法



改良オイラー法



ルンゲ・クッタ法



問題６（１）

（２）