# 平成２６年度後期　数値計算法　期末テスト

**問題１**　数値の表現について，以下の各問に答えよ．

（１）**整数型**の数値表現について，右表の[0]～[6]は同じ数を 2 進数（16 ビット）と 10 進数で表現したものを表す．空欄を埋めよ．ただし，(a)，(b)は次の場合である．

(a) 0 と正数のみを表現する場合（負数は表現しない）

(b) 0，正数，負数を表現する場合（負数は 2 の補数を用いて表現する）

| | 2 進数 | 10 進数 (a) | 10 進数 (b) |
|---|---|---|---|
| [0] | 0000 0000 0000 0001 | 1 | 1 |
| [1] | 0000 0000 0000 1001 | [1a] | [1b] |
| [2] | 1111 1111 1111 1111 | [2a] | [2b] |
| [3] | 1111 1111 1111 1101 | [3a] | [3b] |
| [4] | [4] | | 21 |
| [5] | [5] | $2^{16}-4$ | |
| [6] | [6] | | -15 |

（２）**浮動小数点型**の数値表現について，下図のように 16 ビットを用いて，第 15 ビットに符号 s，第 14～8 ビットの 7 ビットに指数 E，第 7～0 ビットの 8 ビットに仮数 f を割り当て，実数 x を次のように表す．

$$x = (-1)^s\ 2^E\ f$$

$f = (\ f_1\ .\ f_2\ f_3\ \dots\ f_9\ )_2$，　$f_i = 0$ または $1$ ( $i = 1, 2, 3, \dots, 9$ )

符号 s = 0 のとき x は正数，s = 1 のとき負数となる．指数部では E に 63 を加えている．仮数部では，常に $f_1 = 1$ として正規化を行い，$f_2$ から $f_9$ までを格納する．なお，x が 0 になる場合は考えない．

| 15 | 14 … … 9 8 | 7 6 … … 1 0 |
|---|---|---|
| s | E + 63 | $f_2$ $f_3$ … … $f_8$ $f_9$ |

例えば，x = 12 の場合，$12 = (-1)^0 \times 2^3 \times 1.5$ と表されることから，

s = 0　　　E = 3 より $E + 63 = 3 + 63 = 66 = (\ 100\ 0010\ )_2$

$f = (\ 1.5\ )_{10} = (\ 1 + 0.5\ )_{10} = (\ 1\times 2^0 + 1\times 2^{-1}\ )_{10}$

$= (\ 1\ .\ 1\ )_2 = (\ 1\ .\ 1000\ 0000\ )_2$

となるため，次のように 16 ビットで表現される．

0100 0010 1000 0000

右表の[0]～[4]は，上記の方式による 16 ビット表現と実数（10 進数）の対応を表す．空欄を埋めよ．

| | 16 ビット表現 | 実数 |
|---|---|---|
| [0] | 0100 0010 1000 0000 | 12 |
| [1] | 0100 0000 0000 0000 | [1] |
| [2] | 1100 0011 0010 0000 | [2] |
| [3] | [3] | 5 |
| [4] | [4] | -14 |

（３）**浮動小数点型**の数値表現における有効桁数を考慮して，次の 10 進数の計算を行うことを考える．

(a) 1234 + 1.456 - 1233　　(b) 5005 × 3 ÷ 5　　(c) 103 × 103 - 102 × 102

それぞれの計算について以下の問に答えよ．なお，有効桁数 10 進 4 桁での 10 進数の表現では，12345 は 12340 となり，1234.5 は 1234 となり，12.345 は 12.34 となり，0.012345 は 0.01234 となる．

(3-1) それぞれの計算の正確な答を書け．

(3-2) それぞれの計算を有効桁数 10 進 4 桁で行った場合の答を書け．ただし，計算の規則として，加減算より乗除算を優先し，また，加減算どうしと乗除算どうしは左から右に向かって書かれている順番に行うこととする．

(3-3) (3-1)の答に対する(3-2)の答が持つ絶対誤差の大きさ，ならびに，相対誤差の大きさを書け．なお，相対誤差の大きさは分数の形で書いてもよい．

(3-4) (3-2)の計算の規則に従って計算しても正確な答を得るためには有効桁数が 10 進で何桁あれば十分か，その最低桁数を書け．

(3-5) (3-2)の計算の規則に従わなくてもよい場合，どのような工夫をすれば有効桁数 10 進 4 桁でも正確な答が得られるか，その工夫を書け．

**問題２**　連立１次方程式の解法について，以下の各問に答えよ．

（１）次の３元連立１次方程式を**ガウス・ジョルダンの方法**で解くことを考える．

$2\ x_1 + 3\ x_2 - \ x_3 = -9$ …(1)

$-4\ x_1 - 9\ x_2 + 4\ x_3 = 31$ …(2)

$6\ x_1 + 3\ x_2 - 2\ x_3 = -7$ …(3)

以下の空欄に値を入れよ．(1-1) で未知数 $x_1$〜$x_3$ の項が消去された場合，係数が 0 と考えること．解答数が多いので，**解答欄を間違えないこと！**

(1-1) まず，式(1)を基準式として用いて，適切な式から $x_1$ の項を消去する．

$2\ x_1 + 3\ x_2 - \ x_3 = -9$ …(1)′

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = 13$ …(2)′

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = 20$ …(3)′

次に，式(2)′を基準式として用いて，適切な式から $x_2$ の項を消去する．

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = 4$ …(1)′′

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = 13$ …(2)′′

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = -6$ …(3)′′

さらに，式(3)′′を基準式として用いて，適切な式から $x_3$ の項を消去する．

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = 2$ …(1)′′′

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = 9$ …(2)′′′

$\boxed{(a)}\ x_1 + \boxed{(b)}\ x_2 + \boxed{(c)}\ x_3 = -6$ …(3)′′′

(1-2) 上記の式(1)′′′〜(3)′′′から，最終的に解は以下のように求められる．

$x_1 = \boxed{(d)}$

$x_2 = \boxed{(e)}$

$x_3 = \boxed{(f)}$

（２）次の３元連立１次方程式を**ガウスの消去法**で解くことを考える．

$2\ x_1 - \ x_2 + 3\ x_3 = -6$ …(1)

$8\ x_1 - 3\ x_2 + 2\ x_3 = -29$ …(2)

$-4\ x_1 + 5\ x_2 - \ x_3 = 32$ …(3)

(2-1) **前進消去**の最終的な結果として得られる３つの式を書け．なお，式(1)〜(3)の上下の順序を変えずに前進消去を行い，結果として得られた３つの式の上下の順序を変えないで解答すること．また，得られた式の両辺を共通の値で割って簡単化したり係数の正負を変えたり等もしないで，前進消去の手順で得られた３つの式をそのままの形で書くこと．

(2-2) 上記の(2-1)の結果を用いて**後退代入**により未知数 $x_1$〜$x_3$ の解を求めよ．ただし，後退代入で解を求める途中過程がわかるように解答すること．

**問題３**　非線形方程式の数値解法について，以下の各問に答えよ．

（１）**２分法**で方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考える．ただし，関数 $f(x)$は，任意の $a$，$b$ $(a < b)$に対して $f(a) < f(b)$を満たすものとする．

(1-1) ある反復時点で真の解を含む $x$ 軸上の区間$[a, b]$が得られているものとする．その区間の中点 $c$ に対して $f(c) > 0$ の場合，２分法により区間$[a, b]$から幅を半分にした真の解を含む区間を書け．

(1-2) ２分法では，はじめに反復 0 回目として与えた真の解を含む区間$[a_0, b_0]$とその中点 $c_0$ から開始し，(1-1)の方法で区間の幅を半分にする処理を反復する．そして，あらかじめ定めた正数 $\varepsilon$ に対して反復停止規準 $|f(c)| < \varepsilon$ を満たした時点で反復を終了し，そのときの中点 $c$ の値を最終的な近似解とする．
ここで，２分法により，次の条件で方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考える．

$f(x) = 2x - 11,\quad [a_0, b_0] = [0, 32],\quad \varepsilon = 2$

このとき，反復の開始から終了までの各反復回（0，1，2，…）で中点 $c$ と $f(c)$がとる値を書け．ただし，解答の表中の全ての箇所を埋める必要はなく，反復を終了する反復回までの値を書け．

（２）**ニュートン法**は，方程式 f(x) ＝ 0 の解を求める際，真の解 α に十分に近い初期値 $x_0$ から開始し，反復式を繰り返し計算することで近似解 $x_0$，$x_1$，$x_2$，… を更新していく解法である．ニュートン法で近似解 $x_i$ から $x_{i+1}$ を求める反復式を書き，その式を導出する方法を図を用いて説明せよ．

**問題４**　数値積分法では，関数 $f(x)$ の区間 $[a,b]$ に対する積分値

$$I=\int_a^b f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

を近似的に求める．

（１）**台形公式**で式①を近似する方法について，解答用紙中の図を用いて説明し，その公式を書け．

（２）**シンプソン公式**で式①を近似する方法について，解答用紙中の図を用いて説明し，その公式を書け．

（３）次の記述中の空欄を適切な式，数値等で埋めよ．

**台形公式**の精度を高めるための複合台形公式では，積分区間 $[a, b]$ を細分し，その細分された各区間に台形公式を適用し，それらの和で積分値を近似する．区間 $[a, b]$ を $n$ 等分したとすると，一つの分割区間の幅 $h$ は $n$，$a$，$b$ を用いて以下のように表される．

$$h = \boxed{\text{(b)}} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

この $h$ を用いて，複合台形公式による積分の近似値 $q$ は，以下のように求められる．

$$q=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2}h\left\{\,f(a+ih)+f(a+(i+1)h)\,\right\}$$
$$=\boxed{\text{(c)}}\left\{f(a)+\boxed{\text{(d)}}\sum_{i=1}^{n-1}f(a+\boxed{\text{(e)}})+f(b)\right\} \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

複合台形公式の積分区間の分割数 $n$ を２倍ずつ増やしながら反復的に積分近似値の精度を高めていき，十分に要求精度を満たした段階で反復を停止する方法を自動積分法という．つまり，分割数が $n$ のときの近似値を $q(n)$とすると，$n=1$ から開始して $q(1)\to q(2)\to q(4)\to q(8)\to \ldots \to q(n)\to q(2n)\to \ldots$ と精度を上げていく．このとき，$q(2n)$を求めるのに必要な関数 $f$ の値のうちの約半数は $q(n)$を求める際にすでに計算されているため，改めて再計算するのは無駄である．そこで，直前に求めた $q(n)$の値を利用し，新たに必要となる関数値のみを計算するだけで $q(2n)$の値を得るようにすることで，効率を上げる方法が考えられる．式②の $h$ を $h_n$ とすると，分割数が $2n$ のときの一つの分割区間の幅 $h_{2n}$ は，$n$，$a$，$b$ を用いて以下のように表される．

$$h_{2n} = \boxed{\text{(f)}}$$

以下に示すように，はじめに式③により $h_{2n}$ を用いて $q(2n)$を表し，その式を変形していくことで，$q(n)$と新たに必要となる関数値のみから $q(2n)$を表すことができる．

$$q(2n)=\boxed{\text{(g)}}\left\{f(a)+\boxed{\text{(h)}}\sum_{i=1}^{2n-1}f(a+\boxed{\text{(i)}})+f(b)\right\} \qquad \leftarrow \text{式③より}$$

$$=\boxed{\text{(g)}}\left\{f(a)+\boxed{\text{(h)}}\sum_{i=1}^{n-1}f(a+\boxed{\text{(j)}})+f(b)\right\}+\boxed{\text{(g)}}\left\{\boxed{\text{(h)}}\sum_{i=1}^{n}f(a+\boxed{\text{(k)}})\right\}$$

$$=\boxed{\text{(l)}}+\boxed{\text{(m)}}\sum_{i=1}^{n}f(a+\boxed{\text{(k)}}) \qquad \leftarrow q(n)\text{を含む式}$$

（４）次の記述中の空欄を適切な式，数値等で埋めよ．

**シンプソン公式**についても，台形公式と同様，（３）の式②で表される区間 $[a,\ b]$ の $n$ 等分（$n$ は偶数）による分割区間幅 $h$ を用いて，複合公式は以下のようになる．ただし，偶数 $n$ を $n=2\,m$ と表す．

$$q=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{3}h\ \left\{f(a+2ih)+4f(a+\boxed{\text{(c)}})+f(a+\boxed{\text{(d)}})\right\}$$

$$=\frac{1}{3}h\ \left\{\underbrace{f(a)+f(b)}_{\text{(あ)}}+\underbrace{2\sum_{i=0}^{m-2}f(a+\boxed{\text{(e)}})}_{\text{(い)}}+\underbrace{4\sum_{i=0}^{m-1}f(a+\boxed{\text{(f)}})}_{\text{(う)}}\right\} \quad \text{......} ⑤$$

ここで，分割数が $n$ のときの積分近似値を $q(n)$とし，分割区間幅 $h$ を $h_n$ と表すと，式⑤の（あ），（い），（う）を $O(n)$，$T(n)$，$F(n)$と表すことで次式を得る．

$$q(n)=\boxed{\text{(g)}}\left\{O(n)+2\,T(n)+4\,F(n)\right\}$$

台形公式と同様，シンプソン公式でも分割数 $n$ を 2 倍ずつ増やしながら積分近似値の精度を高めていく自動積分法が考えられる．シンプソン公式では，自動積分の各反復において，分割数 $n$ の近似値 $q(n)$を構成する $O(n)$，$T(n)$，$F(n)$を利用して，関数 $f$ の無駄な計算を行なうことなく分割数 $2n$ の $O(2n)$，$T(2n)$，$F(2n)$を以下のように得ることで，近似値 $q(2n)$を効率的に求める．なお，分割数 $2n$ の分割区間幅を $h_{2n}$ とする．

$$q(2n)=\boxed{\text{(h)}}\{O(2n)+2\,T(2n)+4\,F(2n)\}$$

$$O(2n)=\boxed{\text{(i)}} \qquad T(2n)=\boxed{\text{(j)}} \qquad F(2n)=\sum_{i=0}^{n-1}f(a+\boxed{\text{(k)}})$$

**問題５**　微分方程式の初期値問題では，微分方程式

$$y'(x)=f(x,y),\quad a\le x\le b \qquad \text{......} ①$$

について初期条件 $y(a) = y_a$ を満たす解 $y(x)$を求める．これを数値的に解く差分法では，$x$ 軸上の区間 $[a,\ b]$ を $n$ 等分し，各分割点 $x_i$ を分割区間幅（刻み幅）$h$ を用いて以下のように表す．

$$x_i=a+ih,\quad i=0,1,2,\ldots,n \qquad h=(b-a)/n$$

すると，$x_i$ に対する $y(x_i)$の値は，式①の $f$ を積分することで，以下のように表される．

$$y(x_i)=y(x_{i-1})+\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x,y)dx \qquad \text{......} ②$$

これが方程式①に対する差分方程式であり，初期値 $y(x_0) = y_a$ から開始し，式②を $i = 1, 2, \ldots, n$ と逐次的に適用していくことで，解 $y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_n)$を得ることができる．

（１）式②の積分部分を近似的に求める解法にオイラー法がある．$x = x_i$における $y$ の真の値 $y(x_i)$を近似した値を $y_i$ と書くこととする．このとき，オイラー法で $y_{i-1}$ から $y_i$ を求める公式を示し，この公式の意味を図を用いて説明せよ．

（２）オイラー法の誤差について，以下の問に答えよ．なお，解答には，適宜，オーダ $O$ を用いた表記を使ってもよい．

(2-1) 真の値 $y(x_1) = y(x_0+h)$ を $y(x_0) = y_0$ のまわりでテイラー展開することで，オイラー法による近似値 $y_1$ と刻み幅 $h$ を用いて $y(x_1)$ を表せ．なお，関数 $y(x)$ の微小値 $h$ による $x=\beta+h$における テイラー展開は次式となる．

$$y(\beta+h)=y(\beta)+\frac{y'(\beta)}{1!}h+\frac{y''(\beta)}{2!}h^2+\frac{y'''(\beta)}{3!}h^3+\cdots+\frac{y^{(k)}(\beta)}{k!}h^k+\cdots$$

(2-2) オイラー法における１ステップでの誤差（局所離散化誤差）$y(x_1) - y_1$ と $h$ との関係を書け．

(2-3) 最終ステップ（$n$ ステップ）までに累積される誤差（累積離散化誤差）と $h$ との関係を書け．

# 平成２６年度後期　数値計算法　期末テスト　解答用紙

平成　　　年度入学　学籍番号　　　　　　　　　　　　　　　氏名

**問題１**（１）

[1a]　　　　　　[1b]

[2a]　　　　　　[2b]

[3a]　　　　　　[3b]

[4]

[5]

[6]

（２）

[1]　　　　　　[2]

[3]

[4]

（３）　**★解答場所を間違えないこと！**

| | (3-1) | (3-2) | (3-4) |
|---|---|---|---|
| (a) | | | |
| (b) | | | |
| (c) | | | |

(3-3)

| | (a) | (b) | (c) |
|---|---|---|---|
| 絶対誤差の大きさ | | | |
| 相対誤差の大きさ | | | |

(3-5)　(a)

(b)

(c)

**問題２**（１）(1-1)

(a)　　(b)　　(c)　　…(2)′

(a)　　(b)　　(c)　　…(3)′

(a)　　(b)　　(c)　　…(1)′′

(a)　　(b)　　(c)　　…(2)′′

(a)　　(b)　　(c)　　…(3)′′

(a)　　(b)　　(c)　　…(1)′′′

(a)　　(b)　　(c)　　…(2)′′′

(a)　　(b)　　(c)　　…(3)′′′

(1-2)　(d)　　(e)　　(f)

（２）(2-1)

(2-2)

**問題３**（１）(1-1)

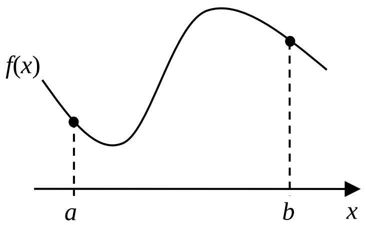
(1-2)

| 反復回 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| c | | | | | |
| f(c) | | | | | |

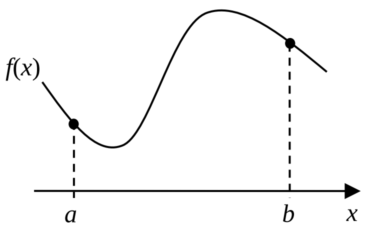
**裏面に続く**

**問題３**（２）

**問題４**（１）




（２）




（３） ★都合により (a) はありません.

(b)______ (c)______

(d)______ (e)______

(f)______ (g)______

(h)______ (i)______

(j)______ (k)______

(l)______ (m)______

**問題４**（４） ★都合により (a), (b) はありません.

(c)______ (d)______

(e)______ (f)______

(g)______ (h)______

(i)______ (j)______

(k)______

**問題５**（１）

（２）(2−1)

(2−2)

(2−3)