

平成24年度後期 数値計算法 期末テスト

問題1 数値の表現について、以下の各問に答えよ。

(1) 整数型の数値表現では、与えられたビットの2進数で整数を表現する。16ビットを用いて10進数の整数(10進整数) x を表現する場合について、以下の各問に答えよ。なお、答は指数形式($2^{\square}$ のような形式)を含んだ形のままでよい。

(1-1) 表現可能な整数の個数(何通りの整数が表現できるか)を書け。

(1-2) 次の(a), (b)の場合について、表現可能な10進整数 x の範囲を $\square \leq x \leq \triangle$ という形式で書け。

(a) 0と正数のみを表現する場合(負数は表現しない)

(b) 0, 正数, 負数を表現する場合(負数は2の補数を用いて表現する)

(1-3) 上記の(a), (b)の場合では、同じ16ビットの2進数でも、異なる10進整数を表す場合がある。次の各々の16ビット2進数が表す10進整数を(a)と(b)の場合について書け。

[1] 0000 0000 0000 1111 [2] 1000 0000 0000 1000 [3] 1111 1111 1111 1111

(2) 浮動小数点型の数値表現について、下図のように16ビットで実数 x を表現することを考える。すなわち、第15ビットに符号 s 、第14～8ビットの7ビットに指数 E 、第7～0ビットの8ビットに仮数 f を割り当て、実数 x を次のように表す。

$$x = (-1)^s 2^E f$$

$$f = (f_1 . f_2 f_3 \dots f_9)_2, \quad f_i = 0 \text{ または } 1 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 9)$$

符号 $s = 0$ のとき x は正数、 $s = 1$ のとき負数となる。指数部では E に63を加えている。仮数部では、常に $f_1 = 1$ として正規化を行い、 f_2 から f_9 までを格納する。なお、 x が0になる場合は考えない。

15	14	...	...	8	7	6	...	...	0
s	E + 63				f ₂	f ₃	...	...	f ₉

例えば、 $x = 12$ の場合、 $12 = (-1)^0 \times 2^3 \times 1.5$ と表されることから、

$$s = 0 \quad E = 3 \text{ より } E + 63 = 3 + 63 = 66 = (100\ 0010)_2$$

$$f = (1.5)_{10} = (1 + 0.5)_{10} = (1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1})_{10}$$

$$= (1 . 1)_2 = (1 . 1000\ 0000)_2$$

となるため、次のように16ビットで表現される。

$$0100\ 0010\ 1000\ 0000$$

この表現方式に関して、以下の各問に答えよ。

(2-1) 空欄に値を入れよ。 $\log_{10} 2 = 0.301$ とし、(b)は四捨五入して小数点以下第2位まで示せ。

f_1 を含めると、この表現の実質的な仮数部のビット数は $\square$ (a) ビットとなる。

よって、 $2^{\square}$ (a) = $10^{\square}$ (b) の計算から、有効桁数は10進数換算で $\square$ (b) 桁となる。

(2-2) 指数部 $E + 63$ の値として、最小値000 0000ならびに最大値111 1111は特別な使い方をするものとして通常は使用しないようにした場合、指数 E の値の最小値と最大値を10進数で答えよ。

(2-3) 以下の空欄を埋めよ。ただし、(a), (b), (f)は8ビットの2進数で、他は10進数で答えよ。

$f_1 = 1$ の場合、仮数 f が取る最小値は $f = (1 . \square$ (a) $)_2$ であり、最大値は $f = (1 . \square$ (b) $)_2$ である。よって、(2-2)の結果と合わせると、実数 x が正数($s = 0$)の場合、 x が取り得る最小値は、

$$x = 2^{\square}$$
 (c) $\times (1 . \square$ (a) $)_2 = 2^{\square}$ (c) $\times (\square$ (d) $)_{10}$

となる。また、最大値は、

$$x = 2^{\square}$$
 (e) $\times (1 . \square$ (b) $)_2 = 2^{\square}$ (e) $\times (10 - 0 . \square$ (f) $)_2$
 $= 2^{\square}$ (e) $\times (2 - 2^{\square}$ (g) $)_{10}$

となる。

(2-4) この表現方式で0100 0011 1100 0000と表される値を10進数で表せ。

(2-5) この表現方式で10進数の-36を表した場合、どのように16ビットで表現されるかを書け。

問題2 連立1次方程式の解法について、以下の各問に答えよ。(1) 次の3元連立1次方程式を**ガウス・ジョルダンの方法**で解くことを考える。

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \quad \dots(1)$$

$$-4x_1 - 9x_2 + 4x_3 = 31 \quad \dots(2)$$

$$6x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \quad \dots(3)$$

以下の空欄に値を入れよ。(1-1)で未知数 $x_1 \sim x_3$ の項が消去された場合、係数が0と考えること。解答数が多いので、**解答欄を間違えないこと!**

(1-1) まず、式(1)を基準式として用いて、適切な式から x_1 の項を消去する。

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -9 \quad \dots(1)'$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 13 \quad \dots(2)'$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 20 \quad \dots(3)'$$

次に、式(2)'を基準式として用いて、適切な式から x_2 の項を消去する。

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 4 \quad \dots(1)''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 13 \quad \dots(2)''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = -6 \quad \dots(3)''$$

さらに、式(3)''を基準式として用いて、適切な式から x_3 の項を消去する。

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 2 \quad \dots(1)'''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = 9 \quad \dots(2)'''$$

$$\boxed{(a)} x_1 + \boxed{(b)} x_2 + \boxed{(c)} x_3 = -6 \quad \dots(3)'''$$

(1-2) 上記の式(1)'''~(3)'''から、最終的に解は以下のように求められる。

$$x_1 = \boxed{(d)}$$

$$x_2 = \boxed{(e)}$$

$$x_3 = \boxed{(f)}$$

(2) 次の3元連立1次方程式を**ガウスの消去法**で解くことを考える。

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \quad \dots(1)$$

$$8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -29 \quad \dots(2)$$

$$-4x_1 + 5x_2 - x_3 = 32 \quad \dots(3)$$

(2-1) **前進消去**の最終的な結果として得られる3つの式を書け。なお、式(1)~(3)の上下の順序を変えずに前進消去を行い、結果として得られた3つの式の上下の順序を変えないで解答すること。また、得られた式の両辺を共通の値で割って簡単化したり係数の正負を変えたり等もしないで、前進消去の手順で得られた3つの式をそのままの形で書くこと。

(2-2) 上記の(2-1)の結果を用いて**後退代入**により未知数 $x_1 \sim x_3$ の解を求めよ。ただし、後退代入で解を求める途中過程がわかるように解答すること。

(3) 次のプログラムは、**ガウス・ジョルダンの方法**、あるいは、**ガウスの消去法**でN元連立1次方程式

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{iN}x_N = b_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad \dots(A)$$

を解くプログラムであり、上記の設定問(1-1)、あるいは、(2-1)の処理を行う部分である。このプログラムでは、式(A)の左辺の係数 a_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$) を配列要素 $a[i-1][j-1]$ に、右辺の定数項 b_i を $a[i-1][N]$ に格納し、解 x_i を $a[i-1][N]$ に重ね書きする。空欄(a)~(f)を埋めて完成させよ。ただし、(a)~(d)はガウス・ジョルダンの方法とガウスの消去法のそれぞれについて別々に答え、(e)はガウス・ジョルダンの方法についてのみ答え、(f)は2つの方法で共通の内容を答えよ。

```

#define N 3
float a[N][N+1];
void main( void )
{
    int    i, j, k;
    float p;

    ... 【中略】 ...

1:
2:   for( k = (a); k < (b); k++ ) {
3:       for( i = (c); i < (d); i++ ) {
4:           (e) {
5:               p = a[i][k] / a[k][k];    a[i][k] = 0;
6:               for( j = k+1; j < N+1; j++ ) { a[i][j] = (f); }
7:           }
8:       }
9:   }
10:
    ... 【中略】 ...
}

```

(4) 次のプログラムは、**ガウス・ジョルダンの方法**で上記の設定(1-2)の処理を行う部分である。空欄(i)～(k)を埋めてプログラムを完成させよ。

```

for( i = (i); i < (j); i++ ) { a[i][N] = (k); }

```

(5) 次のプログラムは、**ガウスの消去法**で上記の設定(2-2)の処理を行う部分である。空欄(1)～(q)を埋めてプログラムを完成させよ。

```

a[N-1][N] = a[N-1][N] / a[N-1][N-1];
for( i = (1); i >= (m); i-- ) {
    for( j = (n); j < (o); j++ ) { a[i][N] = (p); }
    a[i][N] = (q);
}

```

問題3 非線形方程式の数値解法について、以下の各問に答えよ。

(1) **2分法**で方程式 $f(x) = 0$ を解くことを考える。ただし、関数 $f(x)$ は、任意の a, b ($a < b$) に対して $f(a) < f(b)$ を満たすものとする。

(1-1) ある反復時点で真の解を含む x 軸上の区間 $[a, b]$ が得られているものとする。その区間の midpoint c に対して $f(c) > 0$ の場合、2分法により区間 $[a, b]$ から幅を半分にした真の解を含む区間を書け。

(1-2) 2分法の反復を終了する方法について具体的に書け。

(2) **ニュートン法**は、方程式 $f(x) = 0$ の解を求める際、真の解 α に十分に近い初期値 x_0 から開始し、反復式を繰り返し計算することで近似解 $x_0, x_1, x_2, \dots$ を更新していく解法である。

(2-1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を用いて、 $y = f(x)$ 上の点 $(x_i, f(x_i))$ における接線の方程式を書け。

(2-2) 近似解 x_i から x_{i+1} を求めるニュートン法の反復式を書け。

(3) 上記の(2)に関連して、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が容易に求められない場合、ニュートン法の反復式を変形した**割線法**と呼ばれる方法が用いられる。

(3-1) 割線法で用いられる $x = x_i$ における導関数 $f'(x_i)$ を近似する式を書け。

(3-2) 近似解 x_{i+1} を求める割線法の反復式を書け。

(4) 2 分法とニュートン法は、ともに、反復処理により近似解を真の解に近付けていく解法である。これらの解法の収束の速さを考えた場合、2 分法は 1 次収束法、ニュートン法は 2 次収束法である。ここで、 i 回目の反復における近似解 x_i がもつ真の解 α に対する誤差を $e_i = x_i - \alpha$ とし、 $i+1$ 回目の反復における誤差を $e_{i+1} = x_{i+1} - \alpha$ とした場合、誤差 e_i と e_{i+1} がどのような関係になるのかという観点から、一般の $r \geq 1$ に対する r 次収束法とはどのようなものなのかを説明せよ。

問題 4 数値積分法について、以下の各問に答えよ。

(1) 台形公式について、以下の記述中の空欄を適切な式、数値等で埋めよ。

台形公式は、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ に対する積分値

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

を求める代わりに、2 点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を結ぶ直線と x 軸、および、 $x = a$, $x = b$ に囲まれた部分 (台形) の面積を求める近似公式である。この台形の面積 q は、 a , b , $f(a)$, $f(b)$ を用いて以下のように表される。

$$q = \boxed{\text{(a)}} \quad \dots\dots \text{①}$$

台形公式の精度を高めるための複合台形公式では、積分区間 $[a, b]$ を細分し、その細分された各区間に台形公式を適用し、それらの和で積分値を近似する。区間 $[a, b]$ を n 等分したとすると、一つの分割区間の幅 h は n , a , b を用いて以下のように表される。

$$h = \boxed{\text{(b)}} \quad \dots\dots \text{②}$$

この h を用いて、複合台形公式による積分の近似値 q は、以下のように求められる。

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} h \{ f(a+ih) + f(a+(i+1)h) \} \\ &= \boxed{\text{(c)}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(d)}} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\text{(e)}}) + f(b) \right\} \quad \dots\dots \text{③} \end{aligned}$$

複合台形公式の積分区間の分割数 n を 2 倍ずつ増やしながら反復的に積分近似値の精度を高めていき、十分に要求精度を満たした段階で反復を停止する方法を自動積分法という。つまり、分割数が n のときの近似値を $q(n)$ とすると、 $n=1$ から開始して $q(1) \rightarrow q(2) \rightarrow q(4) \rightarrow q(8) \rightarrow \dots \rightarrow q(n) \rightarrow q(2n) \rightarrow \dots$ と精度を上げていく。このとき、 $q(2n)$ を求めるのに必要な関数 f の値のうちの約半数は $q(n)$ を求める際にすでに計算されているため、改めて再計算するのは無駄である。そこで、直前に求めた $q(n)$ の値を利用し、新たに必要となる関数値のみを計算するだけで $q(2n)$ の値を得るようにすることで、効率を上げる方法が考えられる。式②の h を h_n とすると、分割数が $2n$ のときの一つの分割区間の幅 h_{2n} は、 n , a , b を用いて以下のように表される。

$$h_{2n} = \boxed{\text{(f)}}$$

以下に示すように、はじめに式③により h_{2n} を用いて $q(2n)$ を表し、その式を変形していくことで、 $q(n)$ と新たに必要となる関数値のみから $q(2n)$ を表すことができる。

$$\begin{aligned} q(2n) &= \boxed{\text{(g)}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^{2n-1} f(a + \boxed{\text{(i)}}) + f(b) \right\} \quad \leftarrow \text{式③より} \\ &= \boxed{\text{(g)}} \left\{ f(a) + \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + \boxed{\text{(j)}}) + f(b) \right\} + \boxed{\text{(g)}} \left\{ \boxed{\text{(h)}} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{\text{(k)}}) \right\} \\ &= \boxed{\text{(l)}} + \boxed{\text{(m)}} \sum_{i=1}^n f(a + \boxed{\text{(k)}}) \quad \leftarrow q(n) \text{を含む式} \end{aligned}$$

式①で求めた $q(1)$ を開始値として上式を反復的に用いて $q(1) \rightarrow q(2) \rightarrow q(4) \rightarrow q(8) \rightarrow \dots$ を求める。

(2) シンプソン公式について、以下の記述中の空欄を適切な式、数値等で埋めよ。

シンプソン公式は、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での積分値を近似するため、 a と b の中点 $c = (a + b) / 2$ を考え、3点 $(a, f(a))$, $(c, f(c))$, $(b, f(b))$ を通る放物線 (2次曲線) で関数 $f(x)$ を近似する。この放物線の式は以下ようになる。

$$P(x) = \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \boxed{(a)}$$

これを区間 $[a, b]$ で積分したのがシンプソン公式であり、 $h = (b - a) / 2$ とすると、その積分値 q は以下のようになる。

$$q = \int_a^b P(x) dx = \frac{1}{3} h \{ f(a) + 4 f(c) + f(b) \} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

シンプソン公式についても、台形公式と同様、(1) の式②で表される区間 $[a, b]$ の n 等分 (n は偶数) による分割区間幅 h を用いて、複合公式は以下ようになる。ただし、偶数 n を $n = 2m$ と表す。

$$\begin{aligned} q &= \sum_{i=0}^{m-1} \boxed{(b)} \{ f(a+2ih) + 4 f(a + \boxed{(c)}) + f(a + \boxed{(d)}) \} \\ &= \boxed{(b)} \left\{ \underbrace{f(a) + f(b)}_{\text{(あ)}} + 2 \sum_{i=0}^{m-2} \underbrace{f(a + \boxed{(e)})}_{\text{(い)}} + 4 \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{f(a + \boxed{(f)})}_{\text{(う)}} \right\} \quad \dots\dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

ここで、分割数が n のときの積分近似値を $q(n)$ とし、分割区間幅 h を h_n と表すと、式⑤の (あ), (い), (う) を $O(n)$, $T(n)$, $F(n)$ と表すことで次式を得る。

$$q(n) = \boxed{(g)} \{ O(n) + 2 T(n) + 4 F(n) \}$$

台形公式と同様、シンプソン公式でも分割数 n を2倍ずつ増やしながら積分近似値の精度を高めていく自動積分法が考えられる。シンプソン公式では、自動積分の各反復において、分割数 n の近似値 $q(n)$ を構成する $O(n)$, $T(n)$, $F(n)$ を利用して、関数 f の無駄な計算を行なうことなく分割数 $2n$ の $O(2n)$, $T(2n)$, $F(2n)$ を以下のように得ることで、近似値 $q(2n)$ を効率的に求める。なお、分割数 $2n$ の分割区間幅を h_{2n} とする。

$$\begin{aligned} q(2n) &= \boxed{(h)} \{ O(2n) + 2 T(2n) + 4 F(2n) \} \\ O(2n) &= \boxed{(i)} \quad T(2n) = \boxed{(j)} \quad F(2n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + \boxed{(k)}) \end{aligned}$$

式④で求めた $q(2)$ を開始値として上記の関係を反復的に用いて $q(2) \rightarrow q(4) \rightarrow q(8) \rightarrow \dots$ を求める。

問題5 微分方程式の初期値問題では、微分方程式

$$y'(x) = f(x, y), \quad a \leq x \leq b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

について初期条件 $y(a) = y_a$ を満たす解 $y(x)$ を求める。これを数値的に解く差分法では、 x 軸上の区間 $[a, b]$ を n 等分し、各分割点 x_i を分割区間幅 (刻み幅) h を用いて以下のように表す。

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \\ h &= (b - a) / n \end{aligned}$$

すると、 x_i に対する $y(x_i)$ の値は、式①の f を積分することで、以下のように表される。

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

これが方程式①に対する差分方程式であり、初期値 $y(x_0) = y_a$ から開始し、式②を $i = 1, 2, \dots, n$ と逐次的に適用していくことで、解 $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ を得ることができる。

(1) 式②の積分部分を近似的に求める解法にオイラー法がある。 $x = x_i$ における y の真の値 $y(x_i)$ を近似した値を y_i と書くこととする。このとき、オイラー法で y_{i-1} から y_i を求める公式を示し、この公式の意味を図を用いて説明せよ。

(2) オイラー法の誤差について、以下の問に答えよ。なお、解答には、適宜、オーダー O を用いた表記を使ってもよい。

(2-1) 真の値 $y(x_1) = y(x_0+h)$ を $y(x_0) = y_0$ のまわりでテイラー展開することで、オイラー法による近似値 y_1 と刻み幅 h を用いて $y(x_1)$ を表せ。なお、関数 $y(x)$ の微小値 h による $x = \beta + h$ におけるテイラー展開は次式となる。

$$y(\beta+h) = y(\beta) + \frac{y'(\beta)}{1!}h + \frac{y''(\beta)}{2!}h^2 + \frac{y'''(\beta)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{y^{(k)}(\beta)}{k!}h^k + \cdots$$

(2-2) オイラー法における1ステップでの誤差（局所離散化誤差） $y(x_1) - y_1$ と h との関係を書け。

(2-3) 最終ステップ（ n ステップ）までに累積される誤差（累積離散化誤差）と h との関係を書け。

問題6 次に示す各プログラムについて、(★) の代入文が実行される回数を N の式で書け。なお、(6) は、2箇所(★) が実行される回数の合計を書け。また、次の公式を使ってもよい。

$$\sum_{k=1}^N k = \frac{1}{2}N(N+1) \qquad \sum_{k=1}^N k^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

(1)

```
for( i = 1; i <= N; i++ ) {
    for( j = 1; j <= N; j++ ) {
        a[i][j] = i + j;    ← (★)
    }
}
```

(2)

```
for( i = 1; i <= N; i++ ) {
    for( j = 1; j <= N; j++ ) {
        for( k = 1; k <= N; k++ ) {
            a[i][j][k] = i + j + k;    ← (★)
        }
    }
}
```

(3)

```
for( i = 1; i <= N; i++ ) {
    for( j = 1; j <= i; j++ ) {
        a[i][j] = i + j;    ← (★)
    }
}
```

(4)

```
for( i = 1; i <= N; i++ ) {
    for( j = i+1; j <= N; j++ ) {
        a[i][j] = i + j;    ← (★)
    }
}
```

(5)

```
for( i = 1; i <= 2*N; i++ ) {
    for( j = 1; j <= 2*N; j++ ) {
        if( ( i * j ) % 2 == 1 ) {
            a[i][j] = i + j;    ← (★)
        }
    }
}
```

(6)

```
for( i = 1; i <= 2*N; i++ ) {
    if( ( i % 2 ) == 1 ) {
        b[i] = i;    ← (★)
    }
    else {
        for( j = 1; j <= N; j++ ) {
            a[i][j] = i + j;    ← (★)
        }
    }
}
```


問題3 (2) (2-1)

(2-2)

(3) (3-1)

(3-2)

(4)

問題4 (1)

(a) _____

(b) _____ (c) _____

(d) _____ (e) _____

(f) _____ (g) _____

(h) _____ (i) _____

(j) _____ (k) _____

(l) _____ (m) _____

(2) (a) _____

(b) _____ (c) _____

(d) _____ (e) _____

(f) _____ (g) _____

(h) _____

問題4 (2) (i) _____

(j) _____

(k) _____

問題5 (1)

(2) (2-1)

(2-2)

(2-3)

問題6

(1) _____ (2) _____

(3) _____ (4) _____

(5) _____ (6) _____